

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 giugno 1904.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni \mathfrak{J} di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota del Corrispondente A. CAPELLI ⁽¹⁾.

La presente Nota è un complemento delle altre due da me già pubblicate sullo stesso argomento ⁽²⁾, specialmente per quanto riguarda il teorema di addizione delle funzioni \mathfrak{J} .

Nella Nota precedente a questa avevo già dato una formola generale di addizione delle funzioni

$$\mathfrak{J}_{\gamma g}(u) \equiv e^{\pi i \gamma g} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i \omega \left(n + \frac{\gamma}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(n + \frac{\gamma}{2}\right) \left(u + \frac{g}{2}\right)},$$

cioè un'espressione di

$$\mathfrak{J}_{\gamma_1 g_1}(u + v) \cdot \mathfrak{J}_{\gamma_2 g_2}(u - v) \cdot \mathfrak{J}_{\gamma_3 g_3}(0) \cdot \mathfrak{J}_{\gamma_4 g_4}(0)$$

in funzione *binomia* delle \mathfrak{J} di u e v , valida qualunque siano gli interi γ_i, g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) soddisfacenti alle condizioni

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \equiv g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \pmod{2} \quad (\text{mod. } 2)$$

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

⁽²⁾ V. Rendiconti delle sedute del 16 novembre 1902 e del 5 aprile 1903.

Questo stesso problema viene qui risoluto con un'altra espressione che è del pari binomia e lascia alle caratteristiche γ e g la stessa generalità. Le notazioni sono le stesse delle due Note precedenti.

I.

1. Nella formola (I) del § I della precedente Nota :

$$(I) \quad 2[\gamma, g] = \sum_{\eta=0}^{\eta=1} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} (-1)^{\eta\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'.$$

la quale sussisteva qualunque siano i numeri interi γ e g soddisfacenti alle condizioni

$$(1) \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \equiv g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \equiv 0 \pmod{2}$$

cangiamo le γ_i in $\gamma_i + \varepsilon'$ e le g_i in $g_i + \eta'$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Otteniamo così

$$2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \sum_{\eta=0}^{\eta=1} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} (-1)^{\eta\varepsilon' + \varepsilon\eta' + \eta\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon + \varepsilon', g + \eta + \eta']$$

Se ora poniamo :

$$\varepsilon + \varepsilon' \equiv \varepsilon'', \quad \eta + \eta' \equiv \eta'' \pmod{2}$$

essendo ε'' ed η'' uguali allo zero ovvero all'unità, potremo anche scrivere tenendo presenti le condizioni (1)

$$\begin{aligned} 2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] &= \\ &= \sum_{\eta=0}^{\eta=1} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} (-1)^{\eta'\varepsilon' + \varepsilon''\eta' + (\eta'' - \eta')\gamma_1 + (\varepsilon'' - \varepsilon')(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta''] \end{aligned}$$

Ma le quattro coppie (ε'', η'') corrispondenti alle quattro coppie (ε, η) non differiscono che per l'ordine dalle stesse quattro coppie (ε, η) . Quindi si potrà anche scrivere :

$$(II) \quad 2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \sum_{\eta=0}^{\eta=1} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} (-1)^{\eta\varepsilon' + \varepsilon\eta' + (\eta - \eta')\gamma_1 + (\varepsilon - \varepsilon')(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

2. Supponiamo ora, per semplicità, che ε' ed η' siano i numeri 0, ovvero 1, e che la coppia (ε', η') differisca dalla coppia $(0, 0)$. La (I) si po-

trà scrivere, isolando nel secondo membro i termini corrispondenti ad $(\varepsilon, \eta) = (0, 0)$ ed $(\varepsilon, \eta) = (\varepsilon', \eta')$:

$$(I)' \quad 2[\gamma, g] = [\gamma, g]' + (-1)^{\eta' \gamma_1 + \varepsilon' (g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']' + \\ + \sum_{\substack{\varepsilon, \eta \neq \varepsilon', \eta' \\ \varepsilon, \eta \neq 0, 0}} (-1)^{\eta \gamma_1 + \varepsilon (g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

e similmente la (II):

$$(II)' \quad 2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = (-1)^{\eta' \gamma_1 + \varepsilon' (g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g)} [\gamma, g]' + [\gamma + \varepsilon', g + \eta']' + \\ + \sum_{\substack{\varepsilon, \eta \neq \varepsilon', \eta' \\ \varepsilon, \eta \neq 0, 0}} (-1)^{\eta \varepsilon' + \varepsilon \eta' + (\eta - \eta') \gamma_1 + (\varepsilon - \varepsilon') (g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

dove col simbolo sommatorio $\sum_{\substack{\varepsilon, \eta \neq \varepsilon', \eta' \\ \varepsilon, \eta \neq 0, 0}}$ si vuol significare che esso va esteso

soltanto a quelle due coppie (ε, η) che differiscono così dalla coppia $(0, 0)$ come dalla coppia (ε', η') .

Se ora la uguaglianza (I)' si somma membro a membro colla (II)' moltiplicata per

$$(-1)^{\eta' \gamma_1 + \varepsilon' (g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g)}$$

e si osserva che, quando la coppia (ε, η) differisce così dalla coppia $(0, 0)$ come dalla coppia (ε', η') , si ha

$$\eta \varepsilon' + \varepsilon \eta' \equiv 1 \pmod{2},$$

si trova

$$(III) \quad [\gamma, g] + (-1)^{\eta' \gamma_1 + \varepsilon' (g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \\ = [\gamma, g]' + (-1)^{\eta' \gamma_1 + \varepsilon' (g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']'.$$

Se invece dalla (I)' si sottrae la (II)', moltiplicata come sopra, membro a membro, si trova

$$[\gamma, g] - (-1)^{\eta' \gamma_1 + \varepsilon' (g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \\ = \sum_{\substack{\varepsilon, \eta \neq \varepsilon', \eta' \\ \varepsilon, \eta \neq 0, 0}} (-1)^{\eta \gamma_1 + \varepsilon (g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

3. Le formole (III) e (III)' si possono ora anche scrivere più semplicemente

$$(IV) \quad [\gamma, g] + (-1)^{n\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta] = \\ = [\gamma, g]' + (-1)^{n\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

e

$$(IV)' \quad [\gamma, g] - (-1)^{n\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta] = \\ = (-1)^{n'\gamma_1 + \varepsilon'(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] + (-1)^{n''\gamma_1 + \varepsilon''(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta''].$$

In queste formole i numeri interi ε ed η sono affatto arbitrarii purchè non entrambi congrui a zero (mod. 2). Quanto ad $\varepsilon', \eta', \varepsilon'', \eta''$ basterà sceglierli in modo che le coppie (ε', η') ed (ε'', η'') siano differenti fra loro (mod. 2) e differiscano così dalla coppia $(0, 0)$, come dalla coppia (ε, η) . In effetto, si riconosce subito che, se le formole (IV) e (IV)' sussistono per valori delle $\varepsilon, \eta, \varepsilon', \eta', \varepsilon'', \eta''$ uguali a 0 ovvero 1, esse sussisteranno del pari se, in luogo di questi valori, si pongano dei numeri qualsivogliano congrui ad essi (mod. 2).

La prima di queste due formole era da noi già stata trovata, con procedimento meno diretto, nel § II della precedente Nota (cfr. art. 3).

II.

1. Le condizioni

$$\Sigma \gamma \equiv \Sigma g \equiv 0 \pmod{2}$$

saranno evidentemente soddisfatte assumendo:

$$\gamma_4 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \quad g_4 = g_1 + g_2 + g_3$$

Noi porremo inoltre

$$(1) \quad \varepsilon = 1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3, \quad \eta = 1 - g_1 - g_2 - g_3,$$

cosicchè sarà

$$\frac{1}{2} \Sigma \gamma = 1 - \varepsilon, \quad \frac{1}{2} \Sigma g = 1 - \eta, \quad \gamma_4 = 1 - \varepsilon, \quad g_4 = 1 - \eta,$$

e prenderemo per z_4 il valore particolare $z_4 = 0$, cosicchè

$$\mathcal{P}_{\gamma_4 + \varepsilon, g_4 + \eta}(z_4) = \mathcal{P}_{11}(0) = 0.$$

Con ciò le formole (IV) e (IV)' ci danno:

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} & \vartheta_{1-\varepsilon, 1-\eta}(0) \cdot \vartheta_{\gamma_1 g_1}(z_1) \cdot \vartheta_{\gamma_2 g_2}(z_2) \cdot \vartheta_{\gamma_3 g_3}(z_3) = \\ & = \vartheta_{1-\varepsilon, 1-\eta} \frac{z_1 - z_2 - z_3}{2} \cdot \prod_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i g_i}(z'_i) + \\ & + (-1)^{\eta \gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \eta + 1)} \vartheta_{11} \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3}{2} \right) \cdot \prod_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i + \varepsilon, g_i + \eta}(z'_i) \end{aligned} \right.$$

e

$$(A)' \quad \left\{ \begin{aligned} & \vartheta_{1-\varepsilon, 1-\eta}(0) \cdot \vartheta_{\gamma_1 g_1}(z_1) \cdot \vartheta_{\gamma_2 g_2}(z_2) \cdot \vartheta_{\gamma_3 g_3}(z_3) = \\ & = (-1)^{\eta' \gamma_1 + \varepsilon'(g_1 + \eta + 1)} \vartheta_{1-\varepsilon + \varepsilon', 1-\eta + \eta'} \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3}{2} \right) \cdot \prod_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i + \varepsilon', g_i + \eta'}(z'_i) + \\ & + (-1)^{\eta'' \gamma_1 + \varepsilon''(g_1 + \eta + 1)} \vartheta_{1-\varepsilon + \varepsilon'', 1-\eta + \eta''} \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3}{2} \right) \cdot \prod_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i + \varepsilon'', g_i + \eta''}(z'_i) \end{aligned} \right.$$

dove

$$z'_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3), \quad z'_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3), \quad z'_3 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3).$$

Ricordiamo che nelle formole (A) ed (A)' gli interi ε ed η possono assumersi a piacere, purchè non entrambi $\equiv 0 \pmod{2}$, e che gli interi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, g_1, g_2, g_3$ saranno poi assoggettati alle sole condizioni

$$(1)' \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 - \varepsilon, \quad g_1 + g_2 + g_3 = 1 - \eta.$$

2. Se nelle formole (A) ed (A)' poniamo

$$z_1 = x_2 + x_3, \quad z_2 = -(x_3 + x_1), \quad z_3 = -(x_1 + x_2)$$

cosicchè

$$z'_1 = -x_1, \quad z'_2 = x_2, \quad z'_3 = x_3, \quad \frac{z_1 - z_2 - z_3}{2} = x_1 + x_2 + x_3,$$

e poi ne moltiplichiamo entrambi i membri per $(-1)^{\gamma_1 g_1}$, esse prendono le forme equivalenti:

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3} \vartheta_{1-\varepsilon, 1-\eta}(0) \cdot \vartheta_{\gamma_1 g_1}(x_2 + x_3) \cdot \vartheta_{\gamma_2 g_2}(x_3 + x_1) \cdot \vartheta_{\gamma_3 g_3}(x_1 + x_2) = \\ & = \vartheta_{1-\varepsilon, 1-\eta}(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \vartheta_{\gamma_1 g_1}(x_1) \cdot \vartheta_{\gamma_2 g_2}(x_2) \cdot \vartheta_{\gamma_3 g_3}(x_3) + \\ & + (-1)^\varepsilon \vartheta_{11}(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \vartheta_{\gamma_1 + \varepsilon, g_1 + \eta}(x_1) \cdot \vartheta_{\gamma_2 + \varepsilon, g_2 + \eta}(x_2) \cdot \vartheta_{\gamma_3 + \varepsilon, g_3 + \eta}(x_3) \end{aligned} \right.$$

e

$$(B) \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3} \mathfrak{P}_{1-\varepsilon, 1-\eta}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(x_2 + x_3) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(x_3 + x_1) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(x_1 + x_2) = \\ & = (-1)^{\varepsilon'(\eta + \eta' + 1)} \mathfrak{P}_{1-\varepsilon + \varepsilon', 1-\eta + \eta'}(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \prod_{i=1}^3 \mathfrak{P}_{\gamma_i + \varepsilon', g_i + \eta'}(x_i) + \\ & + (-1)^{\varepsilon''(\eta + \eta'' + 1)} \mathfrak{P}_{1-\varepsilon + \varepsilon'', 1-\eta + \eta''}(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \prod_{i=1}^3 \mathfrak{P}_{\gamma_i + \varepsilon'', g_i + \eta''}(x_i). \end{aligned} \right.$$

dove:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 - \varepsilon, \quad g_1 + g_2 + g_3 = 1 - \eta$$

e la coppia (ε, η) può scegliersi a piacere purchè non congrua (mod. 2) alla coppia $(0, 0)$.

III.

1. Se ora poniamo nelle (B) e (B')

$$x_1 = -v, \quad x_2 = v, \quad x_3 = u,$$

cosicchè

$$x_2 + x_3 = u + v, \quad x_3 + x_1 = u - v, \quad x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

ne deduciamo le formole di addizione:

$$\begin{aligned} & (-1)^{\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3} \mathfrak{P}_{1-\varepsilon, 1-\eta}(0) \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(u + v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(u - v) = \\ & = \mathfrak{P}_{1-\varepsilon, 1-\eta}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(-v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(v) + \\ & + (-1)^{\varepsilon} \mathfrak{P}_{11}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3 + \varepsilon, g_3 + \eta}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 + \varepsilon, g_1 + \eta}(-v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 + \varepsilon, g_2 + \eta}(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & (-1)^{\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3} \mathfrak{P}_{1-\varepsilon, 1-\eta}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(u + v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(u - v) = \\ & = (-1)^{\varepsilon'(\eta + \eta' + 1)} \mathfrak{P}_{1-\varepsilon + \varepsilon', 1-\eta + \eta'}(u) \mathfrak{P}_{\gamma_3 + \varepsilon', g_3 + \eta'}(u) \mathfrak{P}_{\gamma_1 + \varepsilon', g_1 + \eta'}(-v) \mathfrak{P}_{\gamma_2 + \varepsilon', g_2 + \eta'}(v) + \\ & + (-1)^{\varepsilon''(\eta + \eta'' + 1)} \mathfrak{P}_{1-\varepsilon + \varepsilon'', 1-\eta + \eta''}(u) \mathfrak{P}_{\gamma_3 + \varepsilon'', g_3 + \eta''}(u) \mathfrak{P}_{\gamma_1 + \varepsilon'', g_1 + \eta''}(-v) \mathfrak{P}_{\gamma_2 + \varepsilon'', g_2 + \eta''}(v) \end{aligned}$$

2. Ponendo per brevità

$$1 - \varepsilon = \sigma, \quad 1 - \eta = s$$

e sostituendo in luogo di γ_3 e g_3 i loro valori ricavati dalle (1)' del precedente paragrafo, cioè

$$\gamma_3 = \sigma - \gamma_1 - \gamma_2, \quad g_3 = s - g_1 - g_2,$$

ed osservando che

$$(-1)^{\gamma_3 g_3} \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(0) = \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(0),$$

le formole testè trovate si possono scrivere:

$$\begin{aligned} & (-1)^{\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2} \mathfrak{P}_{\sigma s}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\sigma - \gamma_1 - \gamma_2, s - g_1 - g_2}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(u + v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(u - v) = \\ & = \mathfrak{P}_{\sigma s}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\sigma - \gamma_1 - \gamma_2, s - g_1 - g_2}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(-v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(v) - \\ & - (-1)^\sigma \mathfrak{P}_{11}(u) \cdot \mathfrak{P}_{1 - \gamma_1 - \gamma_2, 1 - g_1 - g_2}(u) \cdot \mathfrak{P}_{1 - \sigma + \gamma_1, 1 - s + g_1}(-v) \cdot \mathfrak{P}_{1 - \sigma + \gamma_2, 1 - s + g_2}(v) \end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned} & (-1)^{\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2} \mathfrak{P}_{\sigma s}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\sigma - \gamma_1 - \gamma_2, s - g_1 - g_2}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(u + v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(u - v) = \\ & = (-1)^{\varepsilon'(s + \eta')} \mathfrak{P}_{\sigma + \varepsilon', s + \eta'}(u) \mathfrak{P}_{\sigma + \varepsilon' - \gamma_1 - \gamma_2, s + \eta' - g_1 - g_2}(u) \mathfrak{P}_{\gamma_1 + \varepsilon', g_1 + \eta'}(-v) \mathfrak{P}_{\gamma_2 + \varepsilon', g_2 + \eta'}(v) + \\ & + (-1)^{\varepsilon''(s + \eta'')} \mathfrak{P}_{\sigma + \varepsilon'', s + \eta''}(u) \mathfrak{P}_{\sigma + \varepsilon'' - \gamma_1 - \gamma_2, s + \eta'' - g_1 - g_2}(u) \mathfrak{P}_{\gamma_1 + \varepsilon'', g_1 + \eta''}(-v) \mathfrak{P}_{\gamma_2 + \varepsilon'', g_2 + \eta''}(v). \end{aligned}$$

In queste formole le $g_1, g_2, \gamma_1, \gamma_2$ sono degli interi affatto arbitrarii. Anche gli interi σ ed s possono scegliersi ad arbitrio purchè non sia

$$\sigma \equiv s \equiv 1 \pmod{2}$$

giacchè non doveva essere

$$\varepsilon \equiv \eta \equiv 0 \pmod{2}.$$

Quanto alle coppie (ε', η') ed (ε'', η'') , esse debbono essere distinte (mod. 2) così fra di loro, come dalle coppie $(0, 0)$ ed $(1 + \sigma, 1 + s)$.

3. Poichè le $g_1, g_2, \gamma_1, \gamma_2$ sono degl'interi affatto arbitrarii, è chiaro che le nostre formole seguiranno a sussistere anche se in esse le $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$ si cangiano rispettivamente in $-\gamma_1, -\gamma_2, -g_1, -g_2$. Con ciò esse assumono, come facilmente si riconosce, la forma

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_{\sigma s}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\sigma + \gamma_1 + \gamma_2, s + g_1 + g_2}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(u + v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(u - v) = \\ & = \mathfrak{P}_{\sigma s}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\sigma + \gamma_1 + \gamma_2, s + g_1 + g_2}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(-v) - \\ & - (-1)^\sigma \mathfrak{P}_{11}(u) \mathfrak{P}_{1 + \gamma_1 + \gamma_2, 1 + g_1 + g_2}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 + \sigma - 1, g_1 + s - 1}(v) \mathfrak{P}_{\gamma_2 + \sigma - 1, g_2 + s - 1}(-v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_{\sigma s}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\sigma + \gamma_1 + \gamma_2, s + g_1 + g_2}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(u + v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(u - v) = \\ & = (-1)^{\varepsilon'(s + \eta')} \mathfrak{P}_{\sigma + \varepsilon', s + \eta'}(u) \mathfrak{P}_{\sigma + \varepsilon' + \gamma_1 + \gamma_2, s + \eta' + g_1 + g_2}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 - \varepsilon', g_1 - \eta'}(v) \mathfrak{P}_{\gamma_2 - \varepsilon', g_2 - \eta'}(-v) \\ & + (-1)^{\varepsilon''(s + \eta'')} \mathfrak{P}_{\sigma + \varepsilon'', s + \eta''}(u) \mathfrak{P}_{\sigma + \varepsilon'' + \gamma_1 + \gamma_2, s + \eta'' + g_1 + g_2}(u) \mathfrak{P}_{\gamma_1 - \varepsilon'', g_1 - \eta''}(v) \mathfrak{P}_{\gamma_2 - \varepsilon'', g_2 - \eta''}(-v) \end{aligned}$$

In entrambe queste formole ⁽¹⁾ le caratteristiche intere (positive o negative) $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$ sono del tutto arbitrarie; ed anche gli interi σ ed s si possono scegliere a piacere purchè non entrambi $\equiv 1 \pmod{2}$. Quanto ai numeri interi $\varepsilon', \eta', \varepsilon'', \eta''$ che si presentano nella seconda formula, essi debbono scegliersi in modo che le quattro coppie

$(0, 0), (1 + \sigma, 1 + s), (\varepsilon', \eta'), (\varepsilon'', \eta'')$ siano fra loro distinte $\pmod{2}$.

Geometria. — *Geometria intrinseca negli spazii di curvatura costante.* Nota del Corrispondente E. CESÀRO ⁽²⁾.

La geometria degli enti immersi in uno spazio ad n dimensioni, di curvatura costante $-1/R^2$, si può agevolmente costituire, in forma intrinseca e senza uscire dallo spazio stesso, valendosi del sistema di coordinate adoperato da Beltrami ⁽³⁾ nella sua *Teoria fondamentale*, di quel sistema cioè che all'espressione della distanza fra due punti

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n),$$

infinitamente vicini, conferisce la forma

$$(1) \quad \frac{R}{x} \sqrt{\delta x^2 + \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_n^2},$$

con x vincolata alle coordinate mediante la relazione

$$(2) \quad x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = R^2.$$

Quando il reticolo delle linee coordinate si sposta rigidamente nello spazio, in corrispondenza dei valori che va assumendo un parametro s , le coordinate d'un punto fisso variano evidentemente in guisa che le loro derivate rispetto ad s si esprimono nelle coordinate stesse, sia esplicitamente, sia, se si vuole, mediante la funzione x ; ed anche la derivata di questa si può immaginare espressa in modo analogo, sicchè

$$\frac{dx}{ds} = \varphi(x, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

e

$$(3) \quad \frac{dx_i}{ds} = \varphi_i(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

⁽¹⁾ La prima di esse non differisce sostanzialmente dalle formole di addizione (III) da noi già date nel § III della precedente Nota.

⁽²⁾ Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

⁽³⁾ *Opere matematiche*, t. I, pag. 407.

per $i = 1, 2, \dots, n$. D'altronde, perchè sia soddisfatta la (2), si trova, derivando, che dev'essere

$$(4) \quad x\varphi + x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \dots + x_n\varphi_n = 0.$$

Quando il punto (x_1, x_2, \dots, x_n) si va spostando nello spazio, le variazioni assolute delle sue coordinate son date dalle formole

$$(5) \quad \frac{\delta x_i}{ds} = \frac{dx_i}{ds} - \varphi_i(x, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

e però le (3) sono le *condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità* del punto.

Ora noi ci proponiamo di determinare le $n + 1$ funzioni φ , per la qual cosa ci conviene pensare le $n + 1$ variabili x come provvisoriamente sciolte dal vincolo (2), ma tali, tuttavia, che non sia lecito attribuir loro incrementi non compatibili col vincolo stesso, ossia non soddisfacenti alla relazione

$$(6) \quad x\delta x + x_1\delta x_1 + x_2\delta x_2 + \dots + x_n\delta x_n = 0.$$

Esprimiamo che, quando il reticolo si sposta, la distanza (1) fra due punti fissi rimane invariata. Siccome

$$\frac{d}{ds} \delta x_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \delta x_n$$

per $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (convenendo di sopprimere l'indice 0), un calcolo facile dà

$$\frac{\varphi}{x} (\delta x^2 + \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i \delta x_j,$$

dove i ed j debbono separatamente variare da 0 ad n . In particolare, se tutte le δx si pongono uguali a zero, tranne δx_i e δx_j , che bisogna supporre proporzionali ad x_j e $-x_i$ affinchè sia soddisfatta la (6), si ottiene

$$\frac{\varphi}{x} (x_i^2 + x_j^2) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} x_j^2 + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} x_i^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) x_i x_j;$$

quindi

$$(7) \quad \frac{\varphi}{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0 \text{ per } i \geq j.$$

Da queste ultime si deduce, derivando,

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} = - \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} = - \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_j \partial x_i} = - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_j} = 0,$$

per ogni terna i, j, k di indici differenti. Intanto dalla prima eguaglianza (7) risulta immediatamente che φ è il prodotto di x per una funzione di x_1, x_2, \dots, x_n ; e questa, in virtù di (8) per $i=0$, deve contenere linearmente le variabili, sicchè

$$\varphi = (a + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) x.$$

Dalla (8), per $i > 0$, segue ancora che $\partial \varphi_i / \partial x_j$ dipende soltanto da x_i e da x_j ; e poichè

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\varphi}{x} = a_j, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\varphi}{x} = -a_i,$$

si ha

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = a_{ij} + a_j x_i - a_i x_j,$$

con $a_{ij} + a_{ji} = 0$. Conosciamo così $n-1$ derivate di φ_i ; le altre due sono

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -a_i x, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = \frac{\varphi}{x} = a + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Dunque

$$\varphi_i = a'_i + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + (a + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) x_i - \frac{1}{2} a_i (x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Ora, se si tien conto del vincolo (2) fra le variabili, bisogna che sia soddisfatta anche la relazione (4), ed occorre perciò che si abbia, identicamente, $aR^2 + \frac{1}{2}(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)R^2 + a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \dots + a'_n x_n = 0$, d'onde $a = 0$, $a'_i = -\frac{1}{2} a_i R^2$, sicchè, finalmente,

$$\varphi_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) x_i - a_i R^2.$$

Le formole precedenti sono particolarmente utili per lo studio degli enti immersi in uno spazio *non-euclideo*, e conviene applicarle immaginando che l'origine $M(x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0)$ passi per tutte le posizioni pos-

sibili nell'ente da studiare. Così l'origine trasporta con sè parecchi vantaggi dell'ordinaria geometria euclidea, giacchè nello spazio infinitesimo circostante ad essa il reticolo delle linee coordinate è simile a quello delle coordinate rettangole cartesiane, e rimangono perciò in vigore, nel dominio di M, le relazioni angolari euclidee. In particolare la direzione di qualsiasi retta condotta per M è definita da coseni α_i , tali che $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$. Per ogni altra retta i coseni direttori si possono definire scegliendo, sulla retta che si vuol considerare, un punto $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, tale che le coordinate dei punti all'infinito, I ed I', siano $\xi_1 \pm \alpha_1 R, \xi_2 \pm \alpha_2 R, \dots, \xi_n \pm \alpha_n R$, per la qual cosa occorre che si abbia

$$(\xi_1 \pm \alpha_1 R)^2 + (\xi_2 \pm \alpha_2 R)^2 + \dots + (\xi_n \pm \alpha_n R)^2 = R^2,$$

ossia

$$(9) \quad \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n = 0,$$

ed inoltre, ponendo $\xi = R \sin \omega$, $\alpha = \cos \omega$,

$$(10) \quad \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1.$$

Intanto la direzione MP è definita dai coseni $\xi_i/\alpha R$, le direzioni MI, MI' dai coseni $\pm \alpha_i + \xi_i/R$; e però gli angoli PMI, PMI' sono entrambi uguali ad ω , giacchè si trova, ricordando la (9), che il coseno di ciascuno di essi ha il valore

$$\sum_1^n \frac{\xi_i}{\alpha R} \left(\pm \alpha_i + \frac{\xi_i}{R} \right) = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{\alpha R^2} = \alpha.$$

Dunque P è il piede della perpendicolare condotta per M alla retta considerata, ed ω è l'angolo di parallelismo di questa retta rispetto ad M.

Ora è facile trovare le condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità d'una retta. Basta (ed è questo un vantaggio della geometria non-euclidea) esprimere l'immobilità dei punti all'infinito. Le condizioni per tale immobilità si scindono subito in

$$(11) \quad \frac{d\alpha_i}{ds} = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n + (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n)\xi_i + (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n)\alpha_i,$$

e, ricordando le (5),

$$(12) \quad \frac{d\xi_i}{ds} = (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n)\alpha_i R^2.$$

Da queste ultime risulta

$$\xi \frac{\partial \xi}{\partial s} = - \sum_1^n \xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial s} = 0;$$

quindi $\partial \xi / \partial s = 0$, ossia $d\xi / ds = (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n) \xi$, e per conseguenza

$$(13) \quad \frac{d\omega}{ds} = (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n) \operatorname{tg} \omega.$$

Inoltre dalla (1) si deduce, mediante le (12), che lo spostamento del punto P è

$$d\sigma = \frac{R}{\xi} \sqrt{\delta \xi_1^2 + \delta \xi_2^2 + \dots + \delta \xi_n^2} = (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_n \alpha_n) R^2 ds.$$

D'altra parte le variazioni delle coordinate dell'origine sono, per le (5),

$$(14) \quad \delta x_1 = a_1 R^2 ds, \delta x_2 = a_2 R^2 ds, \dots, \delta x_n = a_n R^2 ds,$$

e però all'ultima eguaglianza si può dar la forma

$$(15) \quad d\sigma = \alpha_1 \delta x_1 + \alpha_2 \delta x_2 + \dots + \alpha_n \delta x_n.$$

Il moto d'un punto è dunque legato a quello della sua proiezione sopra una retta fissa come nello spazio euclideo; ma se la retta si allontana indefinitamente nello spazio di Lobatschewsky, se cioè tende ad essere $\omega = 0$, ossia $\alpha = 1$, la (10) mostra che tutte le α_i tendono ad annullarsi, e per conseguenza P a rimanere immobile. Al medesimo risultato si perviene, del resto, direttamente, se si osserva che la proiezione $d\sigma_0$ dello spostamento di M sulla perpendicolare ad MP, condotta per M nel piano IMI' è, nel quadrilatero costruito sui lati $d\sigma_0$, $d\sigma$ ed $MP = r$, vincolata a $d\sigma$ ed r mediante la relazione $\operatorname{th} \frac{d\sigma_0}{R} = \operatorname{th} \frac{d\sigma}{R} \cdot \operatorname{ch} \frac{r}{R}$, dalla quale, ricordando (1) che

$\operatorname{sen} \omega = 1 / \operatorname{ch} \frac{r}{R}$, si deduce $d\sigma = d\sigma_0 \cdot \operatorname{sen} \omega$; e questa, poichè i coseni $\alpha_i / \operatorname{sen} \omega$ definiscono, in virtù di (3), la direzione di $d\sigma_0$, non differisce dalla (15).

Ci si consenta, ora, qualche rapido cenno intorno al modo di applicare quanto precede allo studio delle curve e delle superficie nello spazio non-euclideo a tre dimensioni. Si dirigano gli assi delle x, y, z secondo la tangente, la binormale e la normale principale della curva descritta da M, e si prenda ds uguale allo spostamento infinitesimo di M. Per le (14) dev'essere $a_1 = 1/R^2$, $a_2 = a_3 = 0$; ed inoltre, poichè (per le condizioni d'immobilità dei punti) il piano $y = 0$ rota intorno alla retta $a_{21}x + a_{23}z = 0$, se si

(1) Lobatschewsky, Giornale di Battaglini, 1867, pag. 289.

vuole che questa sia la tangente (affinchè $y=0$ sia il piano osculatore) si deve prendere $a_{21}=0$, e per conseguenza $a_{12}=0$. Dopo ciò, se si pone $a_{13}=x$, $a_{23}=\tau$, si trova che le condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto (x, y, z) sono

$$(16) \quad \frac{dx}{ds} = xz - 1 + \frac{x^2}{R^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \tau z + \frac{xy}{R^2}, \quad \frac{dz}{ds} = -(xz + \tau y) + \frac{xz}{R^2}.$$

Per una retta definita dal corrispondente punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ e dai coseni direttori α, β, γ , le condizioni d'immobilità (11) e (12) diventano

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{ds} = x\gamma + 2\frac{\alpha\xi}{R^2}, \quad \frac{d\xi}{ds} = x\zeta - 1 + \alpha^2 + \frac{\xi^2}{R^2}, \\ \frac{d\beta}{ds} = \tau\gamma + \frac{\alpha\eta + \beta\xi}{R^2}, \quad \frac{d\eta}{ds} = \tau\zeta + \alpha\beta + \frac{\xi\eta}{R^2}, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -(x\alpha + \tau\beta) + \frac{\alpha\xi + \gamma\xi}{R^2}, \quad \frac{d\zeta}{ds} = -(x\xi + \tau\eta) + \alpha\gamma + \frac{\xi\zeta}{R^2}; \end{array} \right.$$

e dalla terna di sinistra agevolmente si trae il significato geometrico di x e di τ , *flessione* e *torsione* della linea (M). È poi utile notare che la (13)

$$\text{dà } \frac{d\omega}{ds} = \frac{\xi}{R^2} \operatorname{tg} \omega, \text{ ossia}$$

$$(18) \quad \frac{d}{ds} \log \operatorname{sen} \omega = -\frac{d}{ds} \log \operatorname{ch} \frac{r}{R} = \frac{\xi}{R^2}.$$

Da questa e dalle (17) di sinistra segue che le condizioni

$$(19) \quad \frac{d\alpha}{ds} = x\gamma + \frac{\alpha\xi}{R^2}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \tau\gamma + \frac{\alpha\eta}{R^2}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = -(x\alpha + \tau\beta) + \frac{\alpha\xi}{R^2}$$

sono soddisfatte dai coseni direttori α, β, γ della *perpendicolare ad MP, elevata per M nel piano IMI'*; ed inoltre si ha $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$. Segue invece da tutte le (17) che i coseni direttori di qualunque *parallela, condotta per M ad una retta fissa*, soddisfanno alle condizioni

$$(20) \quad \frac{d\alpha}{ds} = x\gamma - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \tau\gamma + \frac{\alpha\beta}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = -(x\alpha + \tau\beta) + \frac{\alpha\gamma}{R}.$$

Inoltre $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = R \cos^2 \omega$. Se, per esempio, si vuole che (M) sia geodetica d'un cilindro (cono col vertice all'infinito), bisogna che le (20) siano soddisfatte per $\gamma = 0$; e però, se si pone $\alpha = \cos \theta$, $\beta = \operatorname{sen} \theta$, si trova

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{R}, \quad x \cos \theta + \tau \operatorname{sen} \theta = 0,$$

d'onde $\tau = x \operatorname{sh} \frac{s}{R}$, e non x/τ costante, come nello spazio euclideo. Invece, se si vuole che la curva sia geodetica sulla superficie (rotonda) *luogo dei punti equidistanti da una retta fissa*, bisogna prima di tutto scrivere $\xi = 0$; in virtù di (18), per esprimere che la curva appartiene alla detta superficie; poi $\alpha\eta = \beta\xi$, e per conseguenza, successivamente, $\eta = 0$, $\xi = R \cos \omega$, $\gamma = 0$, per esprimere che la normale principale incontra la retta fissa. Posto $\alpha = \cos \theta$, $\beta = \sin \theta$, una delle (19), la prima o la seconda, mostra subito che θ è costante; poi dalle (17) di destra, moltiplicando α e β per $\sin \omega$, si ha

$$xR = \operatorname{th} \frac{r}{R} \cdot \cos^2 \theta + \operatorname{coth} \frac{r}{R} \cdot \sin^2 \theta, \quad \tau R = \left(\operatorname{th} \frac{r}{R} - \operatorname{coth} \frac{r}{R} \right) \cos \theta \sin \theta,$$

ossia x e τ costanti. Adunque son queste le curve che nello spazio di Lobatschewsky conservano le proprietà delle eliche circolari euclidee. In particolare per $\theta = 0$ e per $\theta = \frac{1}{2}\pi$ si trovano circoli (meridiani e paralleli), intrinsecamente definiti nel loro piano dall'una o dall'altra equazione

$$xR = \operatorname{th} \frac{r}{R}, \quad xR = \operatorname{coth} \frac{r}{R}.$$

Se i paralleli hanno il centro reale, i meridiani

lo hanno ideale; ma può accadere che, inversamente, i paralleli, e non i meridiani, abbiano il centro ideale, vale a dire che l'asse di rotazione si trovi fuori dello spazio reale, senza che in questo la superficie cessi di esistere. Ciò si spiega osservando che ogni circonferenza è il luogo dei punti equidistanti dalla polare del proprio centro rispetto all'assoluto, e che tale retta « cade a distanza finita, infinita, o ideale, secondo che il centro cade a distanza ideale, infinita, o finita » (1).

Se, pur continuando a tenere l'asse delle x tangente alla linea (M), si prende l'asse delle z normale ad una superficie qualunque, che passa per (M), si è condotti a considerare le curvature $\mathfrak{G} = x \cos \psi$, $\mathfrak{G} = x \sin \psi$, $\mathfrak{G} = \frac{d\psi}{ds} - \tau$, che la linea possiede rispetto alla superficie, designando con ψ l'inclinazione della normale principale sulla normale alla superficie. Con procedimento del tutto simile a quello da noi adoperato altrove (2) si trovano le (16) trasformate nelle seguenti condizioni

$$\frac{dx}{ds} = \mathfrak{G}z - \mathfrak{G}y - 1 + \frac{x^2}{R^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \mathfrak{G}x - \mathfrak{G}z + \frac{xy}{R^2}, \quad \frac{dz}{ds} = \mathfrak{G}y - \mathfrak{G}x + \frac{xz}{R^2},$$

dalle quali è poi agevole dedurre i teoremi di Meusnier, Bonnet, ecc. Appli-

(1) Battaglini, Giornale di Matematiche, 1867, pag. 228.

(2) Geometria intrinseca, cap. XI.

cando queste relazioni ad una coppia ortogonale di sistemi di linee, si giunge alle formole

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s_1} = \mathcal{U}_1 z - \mathcal{Q}_1 y - 1 + \frac{x^2}{R^2}, & \frac{\partial x}{\partial s_2} = \mathcal{Q}_2 y - \mathcal{U}_2 z + \frac{xy}{R^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial s_1} = \mathcal{Q}_1 x - \mathcal{U}_1 z + \frac{xy}{R^2}, & \frac{\partial y}{\partial s_2} = \mathcal{U}_2 z - \mathcal{Q}_2 x - 1 + \frac{y^2}{R^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial s_1} = \mathcal{U}_1 y - \mathcal{U}_1 x + \frac{xz}{R^2}, & \frac{\partial z}{\partial s_2} = \mathcal{U}_2 x - \mathcal{U}_2 y + \frac{yz}{R^2}; \end{cases}$$

e da queste, mercè la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} = k_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + k_2 \frac{\partial}{\partial s_2},$$

è facile trarre, prima $k_1 = -\mathcal{Q}_1$, $k_2 = \mathcal{Q}_2$, poi le formole di Codazzi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s_2} + 2\mathcal{U}\mathcal{Q}_1 &= (\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2) \mathcal{Q}_2, \\ \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s_1} + 2\mathcal{U}\mathcal{Q}_2 &= (\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1) \mathcal{Q}_1, \end{aligned}$$

e la formola di Gauss

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1} + \mathcal{Q}_1^2 + \mathcal{Q}_2^2 + K = \frac{1}{R^2},$$

in cui K designa la curvatura $\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}^2$.

Terminiamo con un'applicazione alle superficie rotonde. Riferita la superficie alle linee di curvatura (meridiani e paralleli), si ha $\mathcal{U} = 0$, $\mathcal{Q}_1 = 0$, ed \mathcal{U}_1 rappresenta la curvatura κ del meridiano; poi, se r è il raggio del parallelo,

$$\mathcal{U}_2 = \frac{\cos \psi}{R \operatorname{th} \frac{r}{R}}, \quad \mathcal{Q}_2 = \frac{\sin \psi}{R \operatorname{th} \frac{r}{R}},$$

dove r e ψ dipendono unicamente dall'arco s del meridiano. Ora la prima formola di Codazzi e la formola di Gauss danno

$$(22) \quad \frac{dr}{ds} = \sin \psi, \quad \frac{d\psi}{ds} = -\kappa + \frac{\cos \psi}{R} \operatorname{th} \frac{r}{R},$$

come si può, del resto, stabilire anche mediante le (21) di sinistra, espri-

mendo l'immobilità dei punti

$$x = -R \operatorname{sen}(\psi \pm \omega), \quad y = 0, \quad z = R \cos(\psi \pm \omega),$$

situati sull'asse di rotazione, all'infinito. Si ottiene infatti

$$\frac{d}{ds}(\psi \pm \omega) = -x + \frac{\cos(\psi \pm \omega)}{R},$$

d'onde, se si pon mente alla relazione $\cos \omega = \operatorname{th} \frac{r}{R}$, risultano le (22). Si cerchino, per esempio, tutte le superficie rotonde, per le quali la curvatura K è uguale ad $1/R^2$. Bisogna che sia $xR \cos \psi = \cos \omega$, e per conseguenza, sostituendo nella seconda formola (22), ed integrando, $\operatorname{sen} \psi = m \operatorname{sen} \omega$. Per $m = 1$, poichè $\psi = \omega$ o $\psi = \pi - \omega$, si vede che le normali son tutte parallele all'asse, in un verso o nell'altro. Si ha dunque l'*orisfera*. Per $m = 0$ è $\psi = 0$, e si ritrova perciò, in virtù della prima formola (22), il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa. Nel caso generale si ha

$$\frac{d\omega}{ds} = -\frac{m}{R} \operatorname{sen} \omega, \quad \text{d'onde} \quad \cot \omega = \operatorname{sh} \frac{r}{R} = \frac{ms}{R};$$

quindi, se con ϱ si designa il raggio di curvatura del meridiano,

$$\operatorname{th} \frac{\varrho}{R} = \frac{\cos \psi}{\cos \omega}, \quad \text{d'onde} \quad \operatorname{ch} \frac{\varrho}{R} = \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \cdot \frac{s}{R},$$

equazione d'una *svilupante di circolo*. Convien tuttavia mantenere l'equazione sotto la forma

$$(23) \quad xR = \frac{ms}{\sqrt{m^2 s^2 + (1 - m^2) R^2}}$$

per evitare che possa prender forma immaginaria. Si può sempre supporre $m > 0$, cambiando, se occorre, il segno di s . Intanto per $m < 1$ si vede subito che $|x| < 1/R$ qualunque sia s , d'onde segue che la curva è *priva di sviluppata* reale. Siccome per $s = 0$ si ha $x = 0$, $r = 0$, si vede che il meridiano s'inflexe sull'asse di rotazione, col quale fa, nel punto d'incontro, un angolo che ha per seno m . Per $m > 1$ sparisce il punto d'inflexione, ed apparisce in sua vece una cuspide corrispondente al valore $\frac{R}{m} \sqrt{m^2 - 1}$ di s . In questo punto si ha $\operatorname{ch} \frac{r}{R} = m$, $\psi = \frac{1}{2} \pi$, e però la tangente nella cuspide è perpendicolare all'asse di rotazione, e la cuspide

stessa dista dall'asse per $R \log(m + \sqrt{m^2 - 1})$. Nel caso attuale il meridiano è bensì la sviluppante d'una circonferenza *reale*, ma il centro di questa circonferenza *non* è reale, perchè il raggio r' è dato dalla formola (1)

$$\operatorname{th} \frac{r'}{R} = \operatorname{sh} \frac{\rho}{R} \frac{d\rho}{ds} = \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} > 1.$$

Peraltro si noti che $\operatorname{th} \frac{r}{R} \cdot \operatorname{th} \frac{r'}{R} = 1$, d'onde segue che, se r è reale, r' è immaginario, e *viceversa*. Ci si rivela così, tra le superficie prese a considerare, un terzo tipo di superficie rotonde, le quali, mentre hanno per meridiano la sviluppante d'un circolo *a centro reale*, ammettono soltanto un *asse ideale* di rotazione. Le formole relative a quest'ultimo tipo si ottengono cambiando m^2 in $-m^2$, sicchè l'equazione intrinseca del meridiano si trasforma in

$$xR = \frac{ms}{\sqrt{m^2 s^2 - (1 + m^2) R^2}};$$

e questa, per m infinito, tende a confondersi con la (23), ed a rappresentare la sviluppante dell'orisciclo (1).

Paleontologia. — *Balenottera di Borbolya* (Ungheria). Nota del Socio G. CAPELLINI.

In una cava di argilla che si trova nel comune di Borbolya in Ungheria, a poca distanza da Wienerneustädt in Austria, circa venti chilometri ad ovest del lago Fertő, il 30 agosto 1899 furono scoperte le ossa fossili di un cetaceo. Il direttore del R. Istituto geologico di Budapest appena ne ebbe avviso dispose perchè il dott. Tommaso Szonlagh dirigesse la escavazione del fossile, e il proprietario della tegolaia offrì ogni sorta di facilitazioni perchè tutto potesse essere scavato e raccolto diligentemente, e quindi donò al R. Istituto geologico gli importanti resti scheletrici della piccola balena.

Il preparatore Szedlär István fu incaricato di restaurare quelle ossa che subito furono riconosciute spettanti ad una piccola balena, e con pazienza ammirabile si accinse a ricostituire altresì le ossa minutamente frantumate; chiedendo consiglio a quanti potevano aiutarlo e giovandosi di buoni disegni di scheletri di balenottere, tentò quindi di ricostituire anche le ossa mancanti

(1) Questi Rendiconti, 1904, pag. 444.

quasi interamente. L'indaginoso lavoro durò assai tempo e la preparazione fu ultimata solamente nel febbraio scorso.

Nell'agosto dello scorso annò, recatomi a Vienna per la IX Sessione del Congresso geologico internazionale, pensai di approfittare della favorevole circostanza per tornare a Budapest e vedere la balena fossile, della quale più volte avevo inteso parlare anche dal dott. C. Papp e che sapevo essere ormai quasi completamente restaurata.

Accolto con ogni maggiore gentilezza dall'egregio direttore del R. Istituto geologico, con l'aiuto del bravo preparatore potei esaminare lo scheletro ricomposto della balenottera di Borbolya, eseguirne misure e prender note per opportuni confronti con le balenottere fossili italiane.

Appena ultimato il restauro dell'interessante cetaceo, il dott. Papp me ne inviava una fotografia chiedendomi in pari tempo se ritenevo effettivamente che la balenottera di Borbolya si dovesse riferire al genere *Aulocetus*.

Rispondendo, chiesi alcune notizie sul giacimento del fossile ed espressi il desiderio di poterne annunziare i rapporti con gli *Aulocetus* di Sardegna e di San Marino, e poichè il dott. Papp cortesemente annuiva, oggi ne dirò brevemente, riportando quanto egli mi comunicava sulle condizioni geologiche dei dintorni di Borbolya e sulla scoperta dello scheletro della balenottera ⁽¹⁾.

« Borbolya est situé à la lisière occidentale de Hongrie, 20 kilomètres
« à l'ouest du lac Fertő, 221 mètres sur le niveau de la mer. Les alentours
« sont composés de couches d'argile tertiaire dont les fossiles se rapportent à
« des sédiments de mer profonde.

« À Nagy-Marton, près de Borbolya on a recueilli les fossiles suivants:
« *Turritella turris*. Bast. — *Natica millepunctata*, Lam. — *Dendroconus*
« *subraristriatus*, Da Costa. — *Corbula gibba*, Olivi. — *Arca Diluvii*,
« Lam. — *Pectunculus pilosus*, Lam. — *Ostrea cochlear*, Poli. — *Anomia*
« *costata*. Depuis des *Globigerines* en grand nombre. Tous ces fossiles in-
« diquent l'étage supérieur du Méditerranéen. Puisque les couches voisines
« à lignite de Bremberg sont placées un peu plus bas dans le niveau de
« Grund ou bien du *Schlier* qui composent la base de l'étage mentionné,
« et les argiles de Borbolya renferment ci et là aussi des lignites, par con-
« séquent nous pouvons les évaluer aux couches de Grund, c'est-à-dire les
« considérer comme appartenants au Miocène moyen.

(1) Dal giornale Pester Lloyd, 8 marzo 1904 (*Der Urvall von Borbolya*). Die Sehenswürdigkeit des Geologischen Instituts, das in Borbolya gefundene Skelet eines Urvalls (*cetus antediluvianus*), hat nicht ermangelt, auch die Aufmerksamkeit des Auslandes auf sich zu ziehen.

Der Bologneser Professor Dr. Giovanni Capellini, ein hervorragender Kenner der Spezies der Wale, hat dem Direktor des Geologischen Instituts, Ministerialrath Johann Böckk um eine Photographie des interessanten Skelets ersucht, welchen Wunsche bereitwilligst entsprochen wurde.

« Le squelette de la *Balaenoptera* était couché sur le dos, dans l'argile d'une entamure profonde de 12 mètres ».

Ricostruite, come già ho accennato, le diverse ossa, lasciando bianco il gesso col quale furono rifatte le parti mancanti, lo scheletro fu composto in posizione naturale, sostenuto da armature di ferro in guisa da poterne slegare facilmente le singole ossa. La lunghezza dello scheletro così restaurato è di m. 6,50; vi ho contato 54 vertebre, alcune benissimo conservate, parecchie abilmente restaurate. Pel cranio ho notato che offre molta analogia con quello dell'*Aulocetus calaritanus*, ma qualche differenza si rileva nella forma dell'occipitale. Mancano le ossa nasali, ed il preparatore le ha immaginate e ricostruite in gesso, ma forse i nasali veri erano un poco più lunghi di quelli in gesso che stanno al loro posto. I frontali sono molto sciupati e sono invece ben conservati i giugali.

Degli apparati auditivi restano porzioni delle ossa timpaniche le quali posteriormente offrono tuberosità come nell'*Aulocetus calaritanus*; ma trattandosi di ossa incomplete non è possibile un accurato confronto; resta un solo frammento delle ossa petrose.

L'occipitale lungo m. 0,40, con una larghezza alla base di m. 0,40, per la sua forma caratteristica ricorda assai bene quello dell'*Aulocetus calaritanus*.

Il mascellare sinistro è in gran parte ricostrutto con gesso, gli intermascellari sono meglio conservati e furono assai bene restaurati. Queste ossa, lunghe m. 1,90, verso la base complessivamente coi mascellari danno al rostro una larghezza di m. 0,460. Gli intermascellari si allargano verso la metà anteriore e la larghezza maggiore, che si può ritenere di m. 0,060 per ciascuno di essi, la raggiungono a m. 0,540 dalla estremità ditale; costituiscono la estremità del rostro oltrepassando i mascellari di circa m. 0,060. Queste ossa lasciano tra loro ampio spazio e in ciò la balenottera di Borbolya differisce molto da quella di San Marino con la quale si accorda cronologicamente, come con quelle di Sardegna.

Nella mandibola destra merita di essere notata la perfetta conservazione del condilo che è parte caratteristica e tanto interessante per opportuni confronti; in corrispondenza dell'apofisi coronoide l'altezza della mandibola è di m. 0,170.

Anche per l'*Atlante* devo osservare che si rileva notevole somiglianza con quello dell'*Auloceto* di Cagliari, senza però che si possa con quello conguagliare. La larghezza del corpo di questa vertebra è di metri 0,165; l'altezza m. 0,095; la lunghezza m. 0,044. Ho misurato alcune delle vertebre perfettamente conservate ed ho notato che la 30^a è lunga m. 0,130; la 32^a m. 0,15; la 33^a m. 0,140. Le coste sono in gran parte ricostruite. Nell'arto destro che è il meglio conservato, ho notato che l'ulna e il radio hanno le rispettive loro epifisi non ancora saldate, ciò che prova che l'animale era ancora adolescente, ossia nel suo primo stadio.

Fisiologia. — *Esperienze fatte sul Monte Rosa respirando ossigeno puro e mescolanze di ossigeno con anidride carbonica.*
Nota del Socio A. Mosso ⁽¹⁾.

Volli provare l'azione dell'ossigeno puro respirato a grandi altezze e paragonarne gli effetti coll'ossigeno mescolato all'anidride carbonica. Era mio desiderio di scrivere non solo i movimenti del respiro, ma anche la frequenza del polso con un cardiografo, od un timpano applicato sulla carotide, e di studiare nello stesso tempo lo stato dei vasi e la pressione sanguigna per mezzo del pletismografo e dello sfigmomanometro. Tali ricerche sono indispensabili per conoscere la natura del male di montagna, disgraziatamente mancò il tempo per svolgere questo programma e le indagini, che ora riferisco, devono considerarsi come un primo saggio.

Si poteva già prevedere che avrei ottenuto dei risultati diversi nelle due stazioni in alto e in basso, perchè l'eccitabilità dei centri nervosi dovendo dare una reazione che sia utile all'organismo, questa doveva essere diversa sulla vetta del Monte Rosa, dove per la differente composizione del sangue, il ritmo respiratorio e la frequenza dei battiti cardiaci non sono più quali si presentano nella pianura. Il problema è assai più complesso che non paia, e molte sono le incognite che incontriamo nella interpretazione dei fenomeni osservati.

Le analisi del sangue arterioso che ho fatto col dott. G. Marro sulla vetta del Monte Rosa ⁽²⁾ avendo mostrato come per effetto della diminuita pressione barometrica si produceva una notevole diminuzione nella quantità di ossigeno e di anidride carbonica, pareva facile di aggiungere al sangue arterioso il 20 % che gli manca di ossigeno, e il 12 % che gli manca di anidride carbonica. Le esperienze ⁽³⁾ fatte da P. Bert parevano indicare che per degli aumenti eguali di anidride carbonica nell'aria inspirata succedano degli aumenti pure eguali nell'anidride carbonica del sangue arterioso: ma ora le analisi che pubblicherà fra poco il dott. A. Aggazzotti mostrano che l'aria degli alveoli contiene ad una depressione pari a quella del Monte Rosa dal 7 % al 9 % di CO₂: mentre che a Torino varia dal 4 % al 5,5 % di CO₂. Sapendo che per forti depressioni barometriche con tale aria di riserva più ricca di CO₂, ciò nullameno il sangue arterioso contiene meno anidride carbonica, dobbiamo concludere che lo scambio dei gas, non suc-

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 15 maggio 1904.

⁽²⁾ Rendiconti R. Accad. Lincei, 21 giugno 1903.

⁽³⁾ P. Bert, *Pression barométrique*. Paris, 1878, pag. 1007.

cede colle leggi semplici ora ammesse; ma che vi sono altri fattori pei quali il contenuto gassoso del sangue non sta in rapporto colla composizione chimica dell'aria contenuta negli alveoli.

Incominciai questo studio con dosi di 10 % fino a 15 % di CO_2 nell'ossigeno, e quando vidi che tali mescolanze non recavano alcuna molestia mi servii di mescolanze più forti di CO_2 .

Dovendo fare in fretta queste mescolanze, pensai di servirmi di un semplice manometro di Bourdon che segnava i quarti di atmosfera e che venne rettificato insieme agli altri manometri del prof. Cattaneo coll'apparecchio che esiste nell'Istituto tecnico di Torino.

Feci portare nella Capanna Regina Margherita due cilindri di acciaio pieni di ossigeno compresso a 120 atmosfere, i quali pesavano kg. 21,5 ciascuno e due di acido carbonico a 120 atmosfere che pesavano 23 kg. ciascuno. Due altri cilindri alti 0,60, del diametro di 0,22, i quali contenevano 375 litri a 15 atmosfere, servivano per fare le miscele.

Esperienze fatte sul dott. Carlo Foà.

A Torino prima di partire mi ero assicurato che respirando l'ossigeno puro non succedeva alcun mutamento nel respiro e nel polso: per brevità non riferisco questi tracciati che diedero un risultato negativo.

Appena fummo nella Capanna Regina Margherita, mi accorsi subito fin dalle prime osservazioni fatte col cronometro che, respirando l'ossigeno, producevasi un mutamento notevole. Le figure 1 e 2 sono i tracciati di due esperienze fatte col metodo grafico, per vedere l'effetto dell'ossigeno puro. Nella linea superiore (fig. 1) è scritto il polso della carotide destra mettendo sul collo un timpano a bottone; la penna del timpano registratore ad ogni sistole scende in basso. Durante l'esperienza un assistente contava pure il polso alla radiale registrando le variazioni succedute nella frequenza dei battiti cardiaci. Il respiro nella seconda linea è scritto con un pneumografo doppio applicato sul torace. La linea del tempo segna i secondi. In α comincia a respirare l'ossigeno per mezzo della maschera nel modo che fu indicato in una Nota precedente. La frequenza del respiro che era 22 al minuto si rallenta e scende a 20. Dopo $\omega \downarrow$, quando cessa l'inalazione dell'ossigeno, il respiro torna a 22 al minuto. La frequenza del polso che era 54 in 30 secondi scende a 50.

Nel giorno successivo dopo aver fatto colazione alle ore 12, il dott. Carlo Foà si siede ed aspettiamo 10 minuti prima di contare il polso che troviamo essere di 110 al minuto. La fig. 2 rappresenta il tracciato del respiro e del polso, mentre il dott. Foà tiene la maschera davanti alla faccia; nel punto segnato da α con una freccia comincia l'inalazione di ossigeno puro: ed osservasi un rallentamento di due inspirazioni al minuto che da 22 scende

a 20; ma è specialmente la loro profondità che diminuisce. La frequenza



Fig. 1



Fig. 2.

del polso da 55 in 30" scende a 53. Dopo $\downarrow \omega$ cessa la respirazione dell'ossigeno e tutto ritorna normale.

Queste due esperienze dimostrano che nell'altitudine del Monte Rosa le inalazioni fatte coll'ossigeno rallentano il respiro e la frequenza del polso, mentre erano senza effetto a Torino.



FIG. 3.

Volendo provare l'azione dell'anidride carbonica, facciamo come nelle esperienze precedenti in un grande cilindro una miscela di due parti di ossigeno ed una parte di CO_2 . Sono 125 litri alla pressione di cinque atmosfere. L'analisi dette 31 % di CO_2 .

Alle ore 1,45', cioè circa 40 minuti dopo fatta la precedente esperienza coll'ossigeno, il polso del dott. Foà era 60 in 30 secondi (fig. 3). In α comincia a passare la corrente del 31 % di CO_2 . La frequenza del polso diminuisce e continua successivamente 56.52.50.50 ogni 30 secondi. Il respiro da 22 salisce a 30 nel minuto. Il dott. Foà disse che provava un forte stimolo a respirare, così che gli riusciva impossibile trattenere il respiro; che ebbe però un senso di benessere come se il torace potesse allargarsi meglio.

La diminuzione del polso di 20 pulsazioni al minuto, e l'aumento della frequenza e della profondità del respiro col senso di benessere provato coll'inalazione del CO_2 sono un fatto importante, il quale depone in favore dell'ipotesi che l'acapnia possa essere effettivamente una delle cause dei disturbi che si producono nella rarefazione dell'aria.

Ritornato a Torino volli subito provare quali effetti producessero queste forti dosi di anidride carbonica respirate coll'ossigeno.

Pressione barometrica 743 mm. Temp. 16°.

Il dott. Carlo Foà dopo essere rimasto seduto per 15 minuti, respira 20 volte al minuto ed ha 60 pulsazioni. La mescolanza che faremo passare

sotto la maschera, preparata in un cilindro contiene 33 % di CO_2 ; il resto è ossigeno. Quando respira questa miscela il polso sale a 36 in 30": il respiro è 32 nel minuto. L'inalazione dura solo un minuto e mezzo perchè gli dà molestia, e oltre al sapore acido sente una irritazione nella gola ed uno stimolo all'espiazione forzata.

Dopo 10 minuti si ripete la medesima esperienza. Il polso è 30 in 30"; il respiro 20 ogni minuto: quando respira la mescolanza di ossigeno e 33 % di CO_2 il polso sale a 38 in 30", il respiro a 30 in un minuto.

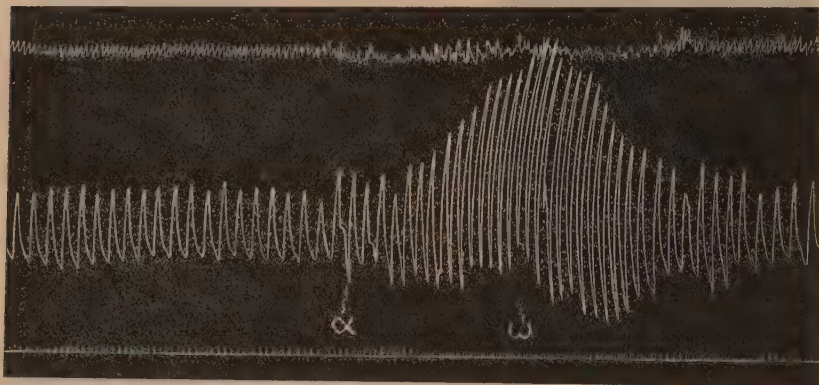


FIG. 4.

Dopo poco più di un minuto dobbiamo cessare perchè il dott. Foà ci fa segno che non può resistere ulteriormente. Mentre questa mescolanza gli produceva un senso di benessere sul Monte Rosa, ora gli reca una forte molestia con irritazione nella gola e leggero capogiro.

Vediamo ripetersi quanto venne già osservato nelle osservazioni che pubblicai nelle Note precedenti, dove, tanto sopra di me quanto nell'insergente Luigi Magnani, le inalazioni fatte con dosi forti di CO_2 producevano effetti diversi sulla vetta del Monte Rosa e nella pianura a Torino.

La figura 4 rappresenta un'esperienza fatta a Torino, per mezzo del metodo grafico con dosi minori di CO_2 . In uno dei soliti cilindri si era preparata una mescolanza di ossigeno che conteneva 21,8 % di CO_2 .

Pressione barometrica 743 m. m. Temp. 17°.

Dopo colazione alle ore 3,30 scriviamo, mentre il dott. Carlo Foà sta seduto da oltre 15 minuti, il polso della carotide col timpano a bottone fissato per mezzo di un nastro intorno al collo e nella linea sottostante il respiro toracico col pneumografo doppio messo nel solito modo.

La frequenza del respiro era 20 al minuto; quando in α gli si mette davanti alla faccia la maschera e respira la mescolanza di ossigeno e 21,8 % di CO_2 la profondità del respiro aumenta e cresce pure la frequenza che va a 32 nel minuto. Quando si cessa in ω dura per un certo tempo la reazione.

La cosa importante è che una tale dose recava molestia al dott. Carlo Foà, il quale disse che non avrebbe potuto continuare oltre a respirare questa mescolanza e che provava un leggero capogiro, mentre nella fig. 3 vedemmo che a 4560 m. respirava senza incomodo una mescolanza di 31 % di CO_2 coll'ossigeno.

Che in basso sia più intensa l'azione dell'anidride carbonica risulta anche paragonando il tempo della reazione sul Monte Rosa e a Torino. Le figure 3 e 4 sono profondamente diverse nella parte della curva scritta quando cessa l'inalazione dell'anidride carbonica. Nella figura 3 la reazione dura pochi secondi, e dopo 6 inspirazioni queste avevano nuovamente l'altezza di prima; mentre che nella fig. 4 a Torino, occorrono 19 inspirazioni prima che il centro respiratorio torni al normale. Vi fu dunque una ventilazione tre volte maggiore prima che si ristabilisca l'equilibrio.

Esperienze fatte su Luigi Magnani.

Le osservazioni che feci sull'insergente Luigi Magnani per istudiare l'azione dell'ossigeno e dell'anidride carbonica diedero gli stessi risultati; e anche in lui si vide che la profondità delle respirazioni diviene notevolmente più piccola per l'azione dell'ossigeno, e che anche il ritmo si modifica e si rallenta, mentre che a Torino non produce sopra di lui alcun effetto.

Per mostrare come siano profonde le differenze che osservansi nel modo di agire del CO_2 in basso ed in alto, riferisco l'esperienza che feci il 24 agosto 1903 nella Capanna Regina Margherita su Luigi Magnani per mezzo di una mescolanza che conteneva 13,09 % di CO_2 , fig. 5.

La frequenza del respiro che a Torino era in media di 14, nella Capanna Regina Margherita è solo più 11 al minuto, e anche la respirazione è meno profonda. In α comincia a respirare la mescolanza del 13,09 % di CO_2 . Succede un leggero aumento nella frequenza che da 11 sale a 16 inspirazioni al minuto. Dopo circa due minuti cessa in ω l'inalazione col CO_2 la frequenza rimane a 16: ma diminuisce la tonacità dei muscoli inspiratori.

La fig. 6 è la continuazione del tracciato 5; vediamo in esso quanto diventi superficiale il respiro. Succede come un collasso dei centri respiratori durante il quale comparisce una forte depressione del torace e la frequenza scende a 19. Tale stato dura poco più di due minuti e poi aumentano la tonicità e la forza dei movimenti respiratori.

Quando vidi scemare così profondamente l'intensità dei movimenti respiratori e la tonicità dei muscoli toracici, mi venne il timore che succedesse

uno svenimento; ma interrogato dopo Magnani mi disse che non si era accorto di nulla.



ω

FIG. 5.

α



FIG. 6.

Questa azione retroattiva che si prolunga per oltre 5 minuti, mentre che la mescolanza dell'acido carbonico aveva agito solo per due minuti, è un

fatto importante. L'anidride carbonica ebbe certo tempo ad eliminarsi tutta fino dal primo minuto. Se persiste un effetto ancora per altri quattro minuti è segno che alla piccola modificazione che osserviamo nel tracciato corrisponde una modificazione più intensa ed un guasto pel quale occorre un tempo più lungo onde ripararlo. Sarebbe questa una conferma di quanto ho già esposto in un'altra Memoria, che i moti del respiro di per sè non bastano per indicarci quali mutamenti succedono nella nutrizione dei centri respiratori. Qui infatti guardando il tracciato 5 da α in ω , non si potrebbe supporre che succeda dopo una reazione così intensa per l'indebolimento e il collasso che vediamo prodursi nella funzione del respiro.

Era già noto per le esperienze di P. Bert che l'ossigeno quando si respira nell'aria rarefatta produce un rallentamento dei battiti cardiaci: per conoscere la natura del male di montagna mi premeva di sapere se anche le inalazioni di anidride carbonica hanno lo stesso effetto. Riferisco, come esempio, una delle esperienze che feci su Magnani Luigi nella camera pneumatica.

Pressione barometrica = 749 mm. Temp. = 23°. Alle ore 8 Luigi Magnani si siede e aspettiamo mezz'ora prima di contare il polso. Gli mettiamo sulla faccia la maschera legata lassamente intorno alla faccia e dentro di essa facciamo penetrare una debole corrente di CO_2 che viene da un gasometro e ne passa circa mezzo litro ogni due secondi in modo che si mescola coll'aria inspirata senza recare alcuna molestia. Luigi Magnani conta da sè stesso la frequenza del polso scrivendola ogni 30 secondi: essa è in media 34 ogni 30".

Quando per mezzo di una chiavetta che si apre passa il CO_2 sotto la maschera, il polso si rallenta e scende a 30 in 30".

Ore 8,38. Frequenza del polso 35 in 30". Respira l'anidride carbonica scende a 32 in 30".

Ore 8,48. Frequenza del polso 37 in 30". Respira CO_2 scende a 33 in 30".

Ore 8,58. Frequenza del polso 36 in 30". Respira CO_2 scende a 31 in 30".

Ho segnato il valore minimo, ma prima di giungere ad esso il polso rallentava poco per volta, il numero dei suoi battiti, ed occorreivano circa due minuti per raggiungere il minimo. Riconosciuto che queste piccole dosi di CO_2 rallentano il polso, provai se tale azione persisteva anche nell'aria rarefatta.

Alle ore 9,18 entra sotto la campana di ferro e messe in moto le due pompe per mezzo del motore elettrico, si produce lentamente una depressione barometrica.

Ore 9,40. Pressione interna = 429; frequenza del polso 40 in 30".

Ore 9,45. Pressione = 399; polso 40, temperatura = 26°.

In un'apertura della campana chiusa da una chiavetta esterna si può regolare il passaggio dell'anidride carbonica sotto la maschera producendo nello stesso modo di prima una corrente eguale di CO_2 ; il polso scende da 40 in 30" a 37 e 36.

Il cuore deve essersi indebolito perchè Luigi scrive mentre è dentro la campana che sente meno bene i palpiti del polso alle radiale. Appena cessa il passaggio dell'anidride carbonica, subito nel minuto successivo il polso torna a 39 e 40 ogni 30".

La pressione scende a 429 mm.; il polso rimane a 40 ogni 30" si aggiunge all'aria il CO_2 scende subito a 35, poi 37, 36 ogni 30".

Dopo aver osservato che per una depressione barometrica pari a quella della Capanna Regina Margherita esiste un rallentamento del polso per una piccola dose di anidride carbonica inspirata, leviamo il tubo del CO_2 e facciamo comunicare la chiavetta con un cilindro pieno di ossigeno compresso. La corrente passa pure a traverso una boccia di lavaggio che serve per regolare la forza della corrente.

Essendo 40 ogni 30" la frequenza del polso, quando passa l'ossigeno sotto la maschera la frequenza scende a 34 in 30".

Ritornato a 40 quando respira l'aria normale, mentre la pressione è sempre = 429 mm., respirando ossigeno scrive 34, 36, 37. Alle ore 10 cessano di funzionare le pompe e comincia a diminuire la pressione: alle ore 10,25 minuti essendo tornato alla pressione normale il polso ritorna 34 in 30" come era al principio della esperienza.

Esperienze sugli animali.

Quanto abbiamo osservato nell'uomo per l'azione dell'ossigeno si è confermato anche negli animali. La cagnetta Rosa che era già stata una volta

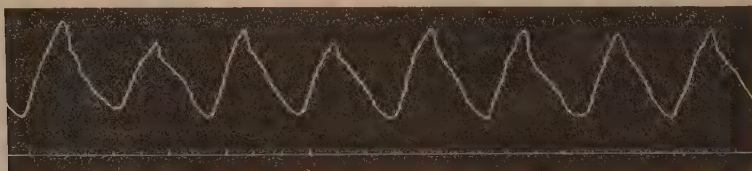


FIG. 7.

alla Capanna Regina Margherita, è così buona che respira senza agitarsi tenendo una museruola metallica fatta espressamente per lei, che chiude ermeticamente quando viene applicata con un bordo di mastice o di grasso, intorno al muso.

Questa maschera in forma di un cono tronco è fatta di metallo ed ha due aperture. In una facevamo penetrare l'ossigeno da un piccolo cilindro dove questo gas trovavasi compresso a cinque atmosfere; dall'altro lato usciva dopo aver servito alla respirazione. Il tracciato 7 fu scritto a Torino nel principio del luglio mentre la cagnetta era sveglia, e fu scritto col pneumografo doppio

che servì per scrivere i tracciati precedenti. La linea inferiore segna il tempo in secondi.

Il giorno 19 agosto (sette giorni dopo che l'animale era arrivato nella Capanna Regina Margherita) torniamo ad applicargli la maschera, e dopo

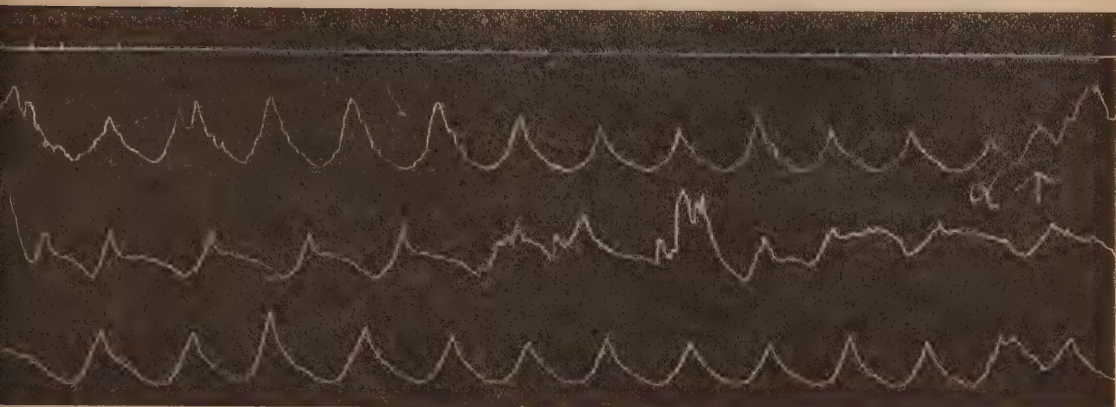


FIG. 8.

aver aspettato che l'animale sia bene tranquillo, scriviamo il tracciato 8 per mezzo di un timpano doppio applicato intorno al torace. Nella linea

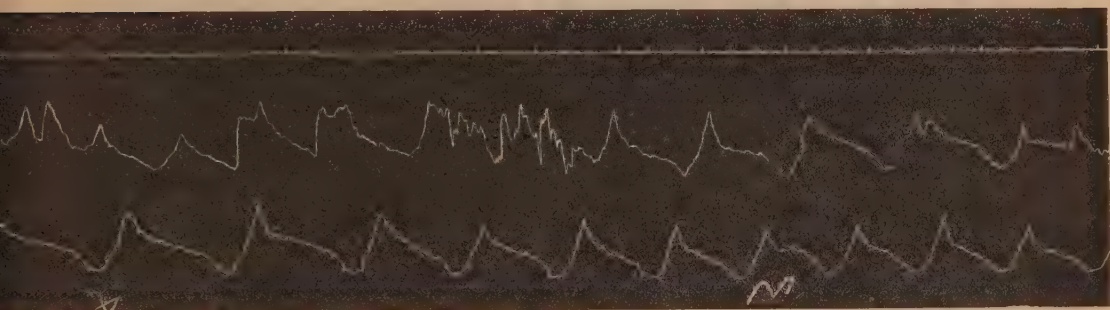


FIG. 9.

superiore sotto quella del tempo che segna i secondi, vediamo che gli atti inspiratori sono meno profondi che a Torino.

Nel punto segnato $\alpha \uparrow$ incomincia a passare l'ossigeno nella maschera. Si tagliarono per brevità sei secondi e il tracciato continua nella fig. 9. Nel principio della seconda linea dei tracciati 8 e 9, la frequenza del respiro è diminuita. Si continua a far respirare l'ossigeno e nella seconda linea del

tracciato 9 il rallentamento diviene evidentissimo, i movimenti del respiro stanno nel rapporto di 5 a 3 paragonando il tracciato della fig. 7 colla linea superiore ed inferiore della fig. 8 che rappresentano il respiro normale. Nel cane gli effetti per la respirazione dell'ossigeno sarebbero dunque sul Monte Rosa evidenti come nell'uomo. In ω della fig. 9 cessa il passaggio dell'ossigeno nella maschera, e la terza linea del tracciato 8 mostra come rapidamente il respiro torni al normale quale era nella linea superiore.

L'effetto che ebbe l'ossigeno sulla frequenza del polso in questa cagnetta è anche maggiore che nell'uomo; perchè il polso da 120 scese una volta fino a 80. Anche guardando il tracciato si vede questa differenza; e confrontando la frequenza dei battiti cardiaci nel primo tratto della linea prima nella fig. 9 vediamo che i battiti del cuore stanno nel rapporto di circa 3 a 2.

Per la respirazione coll'anidride carbonica abbiamo visto negli animali i medesimi effetti che furono descritti sopra sull'uomo e per brevità tralascio di riprodurre i tracciati.

Fisiologia. — *La diminuita tensione dell'ossigeno non basta per spiegare il sonno ed altri fenomeni che produconsi nelle forti depressioni barometriche.* Nota del Socio A. Mosso ⁽¹⁾.

La diminuzione della pressione barometrica agisce sull'organismo solo in quanto fa scemare la pressione parziale dell'ossigeno nell'aria respirata. Questa è la legge di P. Bert ⁽²⁾ ammessa oggi come vera da tutti i fisiologi che studiarono l'azione dell'aria rarefatta. Per provare il valore di questa legge, basta aggiungere dell'ossigeno all'aria respirata mentre si fa diminuire la pressione barometrica. Gli animali tenuti dentro un ambiente nel quale diminuisce la pressione barometrica, ma resta costante la tensione parziale dell'ossigeno, dovrebbero mantenersi in condizioni normali. Dirò subito che avendo sottoposta a tale prova la legge di P. Bert, essa non venne confermata dai fatti quando si riduce la pressione a un terzo di atmosfera.

Le esperienze che ora espongo vennero fatte sopra tre scimmie; due erano della specie *Macacus sinicus*, maschio e femmina, un'altra era un *Papio anubis* maschio, che ho già descritto in una Nota precedente ⁽³⁾ *Esperienze fatte sulle scimmie colla depressione barometrica.* Il metodo che adoperai era semplice; esso consisteva nell'aumentare successivamente la proporzione dell'ossigeno nell'aria dentro l'ambiente nel quale respirava l'animale a misura che diminuiva la pressione barometrica; così che moltiplicando il numero

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 15 maggio 1904.

⁽²⁾ P. Bert, *Pression barométrique*, Paris, 1878, pag. 1153.

⁽³⁾ Rendiconti R. Accad. dei Lincei, 6 marzo 1904.

che indica la proporzione di ossigeno per la pressione barometrica si avesse sempre la stessa tensione parziale dell'ossigeno.

Supponiamo che si facciano due esperienze al livello del mare; una a mezza atmosfera e l'altra ad un terzo di atmosfera: noi avremo coi seguenti valori della pressione barometrica e dell'ossigeno una tensione parziale costante:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ossigeno} & 0,21 \times 760^{\text{mm}} & = 159,60^{\text{mm}} \\ " & 0,42 \times 380 & = 159,60 \\ " & 0,63 \times 253 & = 159,39 \end{array}$$

Colla legge sopra enunciata, l'animale ad $\frac{1}{3}$ di atmosfera non dovrebbe presentare alcun disturbo se gli amministriamo 0,63 % di ossigeno: invece trovai che cambia la frequenza del respiro, che l'animale è sonnolento e dà segni evidenti di malessere.

Le esperienze a mezza atmosfera non hanno interesse, perchè messe sotto la campana, le scimmie a tali depressioni non presentano fenomeni notevoli.

Riferisco perciò solo le esperienze fatte con depressioni più forti, come quelle che si ottengono per altezze corrispondenti ai 7000 metri circa, nei quali limiti, tanto le scimmie quanto l'uomo presentano disturbi per la depressione barometrica. In alcune esperienze feci aumentare la proporzione dell'ossigeno nell'aria respirata prendendolo direttamente da un recipiente pieno di ossigeno compresso.

Facevo passare il gas a traverso di un contatore in modo da introdurre nella campana di vetro sotto la quale trovavansi le scimmie, una corrente di ossigeno che compensasse la rarefazione dell'aria prodotta dalla pompa aspirante. In altre esperienze, stabilita prima la depressione barometrica che volevo raggiungere, facevo in un grande gasometro la mescolanza di aria ed ossigeno che occorreva perchè a tale depressione si mantenesse costante la pressione parziale dell'ossigeno.

Per fare queste mescolanze avevo un grande gasometro della capacità di 500 litri che funzionava bene: sull'acqua avevamo messo dell'olio di vaselina e il gasometro aveva nell'interno un'anima grande che lasciava intorno uno spazio anulare nel quale scorreva la campana così che era minore la quantità di liquido adoperata.

Siccome il gasometro conteneva solo 500 litri e con tale volume non era possibile far uscire completamente tutta l'aria contenuta nella campana di vetro che aveva la capacità di 55 litri, così ero obbligato a fare delle mescolanze che contenessero un poco più di ossigeno. Le analisi dell'aria si facevano prima che cominciasse l'esperienza per conoscere quanto ossigeno vi fosse nella mescolanza contenuta nel gasometro, e si facevano dopo alla fine di ciascuna esperienza, per conoscere esattamente il contenuto di ossigeno che vi era nell'aria respirata dall'animale sotto la campana colla pressione dimi-

nuita. Mi servii per tali analisi dell'apparecchio del prof. Grandis ⁽¹⁾ e sono grato al dott. Alberto Aggazzotti per l'aiuto che volle prestarmi in queste ricerche.

Conoscendo la pressione parziale dell'ossigeno a un terzo di atmosfera, se le cifre non corrispondevano esattamente, era facile fare un raffronto e risalire al valore della tensione per una pressione barometrica più bassa per mezzo di una semplice proporzione come vedremo in seguito.

ESPERIENZA 1^a.

Macacus sinicus femmina; pesa 2370 gr. Pressione barometrica 745 mm. Temp. 17°,5. Tensione parziale ossigeno $0,21 \times 745 = 156,45$ mm.

Tanto in questa quanto nelle seguenti esperienze si tenne sempre un'ora la scimmia sotto la campana perchè il respiro fosse tranquillo. La campana era leggermente sollevata mettendovi sotto un tappo di gomma, così che producevasi una corrente di aria che usciva dai tre tubi messi nel collo della campana. Il bordo di questa veniva spalmato prima con grasso, in modo che levandolo il tappo che la teneva sollevata, questa poggiando sulla tavola di marmo chiudeva ermeticamente. Era necessario aspettare un'ora prima di cominciare l'esperienza, perchè le scimmie messe sotto la campana di vetro hanno sempre per la emozione il respiro più frequente che non abbiano in generale nella gabbia dove vivono.

Questa scimmia ad esempio faceva prima nella sua gabbia 10 respirazioni ogni 30 secondi, ma per l'emozione di essere presa e portata su nel laboratorio e vedersi chiusa sotto la campana di vetro, anche dopo un'ora che era lasciata tranquilla, il respiro non era ancora tornato normale e la scimmia faceva 15 respirazioni ogni 30 secondi.

Nel grande gasometro avevamo preparato prima una mescolanza di aria ed ossigeno: e fatta l'analisi di questa miscela trovammo che essa conteneva 61,88 % di ossigeno. Di tale mescolanza ne avevamo circa 400 litri.

Ore 10,52. Facciamo funzionare la pompa aspirante, mentre si fa comunicare il gasometro colla campana. Avevamo fatto prima una prova e sapevamo che con una determinata posizione del robinetto che regola l'accesso dell'aria nella campana dovevano passare circa 200 litri prima che la pressione interna diventasse solo un terzo di quella atmosferica.

Alle ore 11,5 erasi già raggiunta la depressione di 285 mm. ed erano passati 200 litri della mescolanza di aria ed ossigeno; la frequenza del respiro è cresciuta di poco e la scimmia fa 16 respirazioni: la differenza maggiore è nello stato psichico perchè la scimmia è prima meno vispa ed allegra, poi sembra stanca e diviene sonnolenta.

Ore 11,7. Pressione sempre 285 mm.

Ore 11,8. La scimmia chiude di quando in quando gli occhi. La testa dondola, le cade sul petto e subito dopo la rialza come succede anche nell'uomo quando lotta col sonno stando seduto.

(1) Archiv. italiennes de Biologie, tome XXIX, pag. 325.

Ore 11,9. Vedendo che dorme effettivamente a 285 mm. mentre questo non succede mai alla pressione ordinaria, prendiamo un campione d'aria per mezzo di due pipette della capacità di 130 cc. una delle quali è piena di mercurio e sono comunicati per mezzo di un tubo lungo di gomma. Fatta l'analisi di quest'aria troviamo che essa contiene 57,55 % di ossigeno; la tensione parziale è $0,5755 \times 285 = 164,02$.

Qui la pressione parziale dell'ossigeno è maggiore del normale e ciò non di meno osservasi nella depressione barometrica il fenomeno del sonno, che non può attribuirsi quindi alla tensione dell'ossigeno diminuita. Lasciamo scendere lentamente la pressione; dopo aver fermato la pompa aspirante, l'aria penetra poco per volta fino che sia ristabilita la pressione normale alle ore 11,24. Dopo 5 minuti che la scimmia è tornata alla pressione ordinaria e che per mezzo di un soffiato si fa la ventilazione, troviamo che la frequenza del respiro è scesa a 13. Escludo che tale mutamento in questa e nelle seguenti esperienze sia dovuto ad un'emozione psichica. La scimmia anche alla pressione ordinaria sentiva ancora la corrente dell'aria; fu appunto per evitare tale dubbio che tornati alla pressione normale lasciai altre volte che funzionasse la pompa, in modo che producendosi una forte corrente si manteneva nella campana lo stesso rumore di prima e solo la pressione era cambiata.

ESPERIENZA 2^a.

Macacus sinicus maschio; pesa 2929 gr.

Pressione barometrica 745 mm., temp. 17°; tensione parziale, ossigeno $0,21 \times 745 = 156,45$.

Quando è nella sua stalla la scimmia fa solo 8 respirazioni ogni 30 secondi. Condotta nel laboratorio e messa sotto la campana di vetro dopo un'ora che è sola in riposo, la frequenza del respiro è sempre quasi doppia del normale, cioè 22 in 30 secondi; la scimmia è attenta e vispa, non è impaurita e quando la guardiamo fa delle smorfie. Segue con attenzione tutti i movimenti che facciamo.

Ore 11. Dopo un'ora che sta sotto la campana facciamo agire la pompa aspirante e comincia a passare la mescolanza contenuta nel gasometro che coll'analisi aveva dato 59,6 % di ossigeno.

Ore 11,7. Sono passati circa 200 litri delle mescolanza, la pressione è scesa a 265 mm. La scimmia non è più allegra, respira 32 volte al minuto, appare sonnolenta. Chiude gli occhi.

Ore 11,16. Continua a passare rapidamente la miscela, il contatore messo fra il gasometro e la campana pneumatica segna un giro ogni 10 secondi che sono 2 litri e 52 cc. ogni 10". La scimmia cade colla testa innanzi: frequenza del respiro 32 al minuto. È assopita, quando si sveglia sembra stanca.

Prendiamo un campione con le due pipette a mercurio riunite da un lungo tubo. Ossigeno = 50,9 %. Pressione parziale $0 = 0,509 \times 265 = 134,885$.

Ore 11,25. Tornati alla pressione normale, il respiro scende nuovamente a 22 per minuto e la scimmia prende il suo aspetto normale. Facendo il calcolo vediamo che la scimmia ad una tensione parziale dell'ossigeno di 134,88, presentava dei fenomeni anormali; essa aveva una frequenza del respiro maggiore, era sonnolenta e meno vispa che non sia a tale tensione parziale dell'ossigeno nell'aria ordinaria alla pressione barometrica.

Anche qui osserviamo quanto erasi notato nell'esperienza precedente, che tornando alla pressione normale succede un rallentamento nella frequenza del respiro che da 32 che esso era nell'aria rarefatta scende a 22.

Per conoscere a quale pressione barometrica corrisponde la tensione dell'ossigeno di 134,885 qualora la proporzione dell'ossigeno fosse 21 % basta fare il seguente calcolo:

$$134,885 : 21 :: x : 100 = \frac{134,88}{21} = 641,62 \text{ mm.}$$

Ad una simile pressione barometrica, la quale con una proporzione di 21 % di ossigeno corrisponde all'altezza di 1368 metri, non sarebbesi certo osservato nè il sonno, nè un aumento nella frequenza del respiro.

ESPERIENZA 3^a.

In queste ed altre simili esperienze invece di dare una mescolanza di ossigeno ed aria, ho preferito aggiungere ossigeno puro all'aria respirata mentre per effetto della pompa andava scemando la pressione.

Da uno dei grandi cilindri di acciaio pieni di ossigeno compresso quali vengono messi in commercio dalla ditta Garuti e Pompili di Tivoli, travasavo l'ossigeno in un cilindro più piccolo, e ne prendevo ad esempio 500 litri compressi a 10 atmosfere. Quest'ossigeno lo si faceva passare direttamente sotto la campana. Prima di cominciare l'esperienze ne facevo una di prova per regolare la chiavetta messa sul tubo di accesso dell'aria nella campana, in modo che lasciando la pompa aspirante colla velocità ordinaria datale dal motore elettrico passassero circa 200 litri prima che la pressione nell'interno della campana fosse solo di $\frac{1}{3}$ di atmosfera.

Barometro 744 mm. Temp. = 18°5.

Una grande scimmia *Papio anubis*; pesa 4750 gr. Quando è nella sua gabbia tranquilla questa scimmia fa 9 respirazioni in 30 secondi. Si mette alle ore 8,15 sotto la campana di vetro della capacità di 55 litri, lasciandola un poco sollevata perchè possa circolare l'aria dalle tre aperture che stanno nel collo della campana. Il respiro diviene sempre meno frequente a misura che la scimmia rimane tranquilla ed immobile.

Ore 9,10 in 30'' fa regolarmente 15 respirazioni. La scimmia è vispa ed allegra e si muove spesso tanto che è difficile contare il respiro oltre mezzo minuto.

Ore 9,23. Comincia la depressione barometrica nell'interno della campana mentre penetra l'ossigeno.

Ore 9,31 la pressione è 264 mm., sono penetrati circa 200 litri di ossigeno. L'animale è sonnolento. Muove la bocca e le labbra come se avesse nausea.

Ore 9,35 pressione 234 mm. La scimmia è assopita, tiene la testa pendente sul petto, si appoggia aggomitolata e chiude gli occhi. Respiro 16 al minuto.

Prendiamo un campione d'aria. L'analisi fatta dà

ossigeno 69,806 % $\text{CO}_2 = 0,91 \%$. $234 \times 0,698 = 163,332$.

La tensione normale dell'ossigeno essendo $0,21 \times 744 = 156,24$ vediamo anche questa volta, come nella esperienza prima, essere maggiore la tensione parziale dell'ossigeno e prodursi ciò nulla meno dei mutamenti notevoli nelle funzioni del cervello.

Questa esperienza come altre tre che feci sul medesimo animale prova che la tensione dell'ossigeno non basta da sola per spiegare l'abbattimento e il sonno che sono i fenomeni caratteristici della depressione barometrica.

Ritornata lentamente la pressione a quella atmosferica comune, osservai una diminuzione nella frequenza del respiro che da 16 che era nell'ossigeno, scendeva a 12, 13, 13, 12, 12 ogni 30 secondi. Questa scimmia nel riposo della stalla faceva solo 8 respirazioni in 30''.

La diminuzione della frequenza del respiro quando dalla depressione barometrica le scimmie passano alla pressione normale, è dunque un fatto sicuro che si è ripetuto in tutte tre queste esperienze ed in altre che per brevità non riferisco. Escluso il dubbio che tale mutamento del respiro sia dovuto al cessare di un eccitamento psichico (che anzi sarebbe l'inverso perchè le scimmie dormivano), dobbiamo ritenere che quando la respirazione si compie nell'aria rarefatta sebbene sia costante la tensione parziale dell'ossigeno, questa non basti per mantenere normale il ricambio chimico dell'organismo, cosicchè il respiro si accelera e quando le scimmie tornano alla pressione barometrica normale, il respiro si rallenta, sebbene sia uguale la tensione dell'ossigeno e maggiore l'eccitamento psichico.

Eguale concordanza e dimostrativi furono i fatti che osservammo riguardo alla comparsa del sonno. Le scimmie per quanto siano tranquille, non le vedemmo mai dormire mentre stavano sotto la campana alla pressione barometrica ordinaria. Neppure mai presero quell'atteggiamento di stanchezza così caratteristico nella depressione barometrica quando le scimmie stanno sedute colla testa inclinata sul petto in modo che non si può più vedere la faccia. Le scimmie si appoggiano colla spalla o col dorso alle pareti della

campana e tengono gli avambracci sulle ginocchia colle mani cascanti fra le coscie quando la pressione barometrica è ridotta ad $\frac{1}{3}$, sebbene la tensione dell'ossigeno resti normale.

Alcune volte oltre il sonno e la stanchezza si produsse un moto della bocca simile a quello che precede il vomito, ma non si osservò mai il vomito se la depressione progrediva lentamente. Non riferisco queste esperienze perchè sono più complesse; ma tenendo conto dell'ossigeno che era già penetrato nella campana e facendo il calcolo colla pressione barometrica raggiunta, anche questi casi confermano la regola che il vomito in un'atmosfera ricca di ossigeno comparisce egualmente, sebbene la tensione parziale dell'ossigeno sia poco minore del normale.

Quando le esperienze erano fatte bene (nelle quali cioè facevo crescere più rapidamente la proporzione dell'ossigeno che non la corrispondente depressione barometrica) il vomito non comparve per le pressioni inferiori ad $\frac{1}{3}$ di atmosfera, ma il sonno fu costante in tutte e tre le scimmie; la faccia diventava meno espressiva, cessava la vivacità dei movimenti e le scimmie sembravano abbattute, estenuate e dopo chiudevano gli occhi per dormire.

I risultati che diedero queste esperienze dimostrano come non sia vera la legge formulata da P. Bert. Onde io considero le osservazioni qui riportate come una prova che esiste l'acapnia e ritengo che la sonnolenza e lo stato di depressione dei centri nervosi che osservammo in queste scimmie quando era costante la tensione dell'ossigeno, dipendano in gran parte dalla diminuzione che ha subito l'acido carbonico del sangue come fu dimostrato dalle analisi del sangue fatte sul Monte Rosa insieme al dott. G. Marro ⁽¹⁾.

Le conoscenze che abbiamo oggi sulla diffusione dei gas non bastano per spiegare i rapporti della tensione dell'ossigeno colle combinazioni della emoglobina. Le mie esperienze precedenti hanno mostrato con quale rapidità si elimini il CO_2 e si assorba l'ossigeno dai polmoni ⁽²⁾. Studi analoghi fatti da A. Loewy e N. Zuntz provarono che le condizioni presentate dai polmoni per la diffusione dei gas e l'entrata dell'ossigeno nel sangue dagli alveoli polmonari sono talmente favorevoli, che anche nelle maggiori rarefazioni dell'aria, sopportabili senza nocimento per la vita, il passaggio nel sangue dell'ossigeno non trova ostacolo. È probabile non si mantenga costante la costituzione dell'emoglobina per depressioni relativamente poco considerevoli, sebbene resti costante la tensione dell'ossigeno. In tal caso i fenomeni osservati in questa Nota oltre che dall'acapnia dipenderebbero dell'anossiemia che producesi malgrado la pressione costante dell'ossigeno. Se l'organismo quando rimane costante la tensione parziale dell'ossigeno può mantenere ad un terzo della pressione baro-

⁽¹⁾ Rendiconti R. Accad. d. Lincei, 21 giugno 1903.

⁽²⁾ Archiv f. Anat. u. Phys. 1904, pag. 166.

metrica uno scambio gassoso tra l'aria respirata ed il sangue capace di supplire ai bisogni dell'organismo, le esperienze di questa Nota provano che vi sono altri fattori che modificano le condizioni dell'organismo quando rimane costante la tensione dell'ossigeno e di queste cause la sola fino ad oggi dimostrata è l'acapnia, cioè la diminuzione dell'anidride carbonica nel sangue arterioso.

La conclusione di queste esperienze trovasi riportata nel titolo della Nota: abbiamo veduto infatti che mantenendo costante la pressione parziale dell'ossigeno mentre diminuisce la pressione barometrica, fino circa ad un terzo di atmosfera, compariscono dei disturbi fisiologici che dipendono probabilmente dall'acapnia, perchè non possono attribuirsi alla diminuzione della tensione parziale dell'ossigeno come credeva P. Bert.

Patologia. — *Ricerche preliminari dirette a precisare le cause del gozzo e cretinismo endemici.* Nota del Socio B. GRASSI e dott. L. MUNARON.

Comunichiamo brevemente le ulteriori esperienze da noi fatte.

I. A Rovellasca si è continuato e si continua rigorosamente il tentativo di produrre il gozzo per mezzo dell'acqua fornita per bevanda agli animali proveniente da località dove il gozzo nei cani è diffusissimo. L'acqua viene attinta alternativamente nei varî punti che si ritengono più opportuni. Finora nessun risultato positivo si è ottenuto. Con ciò noi non vogliamo escludere — come non abbiamo mai escluso nelle Note precedenti — che l'acqua possa diventare il veicolo dell'infezione strumosa; conviene soltanto far notare che *malgrado la somministrazione continuata, omai da circa un anno, di acqua che con la maggiore probabilità si poteva presumere gozzigena, il risultato finora è stato negativo.*

È inutile soggiungere che, ammesso il concetto da noi accennato nelle precedenti Note, ne viene di conseguenza che l'acqua potabile, in determinati momenti, può diventar veicolo della infezione strumosa, come abbiám detto esplicitamente.

II. Nella Nota precedente abbiamo riferito un caso unico di sviluppo del gozzo, in un cane proveniente da località immune e tenuto in località del pari immune, in un ambiente nel quale si erano accumulati materiali provenienti da Cogne (fango: spazzature e letame raccolti in stanze, cucine e stalle).

L'esperimento fu continuato aggiungendo svariati materiali organici che potevano ritenersi sospetti.

Abbiamo il piacere di aggiungere che due altri cani presentano traccia di infezione strumosa e che questa è molto evidente in un terzo cane.

III. Nuove esperienze si sono fatte in seguito all'ipotesi di Combe che ammette la possibilità del contagio diretto. Cani provenienti da Cogne e da Cedrasco, più o meno recentemente diventati gozzuti, vennero fatti convivere in ambiente chiuso con altri cani indenni; il risultato fu negativo.

IV. Negativi risultarono tutti i tentativi di infezione per mezzo dell'innesto di porzioni di tiroide e di ipofisi di cani gozzuti di recente. Oltre gli esperimenti già accennati nell'ultima Nota, altri furono istituiti sempre, come si è detto con risultato negativo.

V. Anche il cane va soggetto al cretinismo: possiamo anzi aggiungere che i rapporti tra gozzo e cretinismo già noti per l'uomo valgono anche per il cane.

Matematica. — *I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie.* Nota di M. DE FRANCHIS, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO ⁽¹⁾.

In questa Nota mi propongo di trovare quali siano i piani doppi dotati di due o più integrali di differenziali totali di 1^a specie.

Qualche cosa sui piani doppi dotati di tali integrali era già nota. Ad esempio, era noto che la curva di diramazione deve essere necessariamente riducibile e che in un punto ove passano due sole componenti di essa devono essere riuniti più di uno dei punti d'intersezione delle due componenti ⁽²⁾.

Ma una effettiva enumerazione dei tipi di tali piani doppi non era ancora stata fatta. Io volli dapprima tentare tale enumerazione. Ma, le gravi difficoltà che incontrai mi obbligarono a restringere la ricerca a quei piani doppi i quali contengono più di un differenziale totale di 1^a specie. Io trovo che tali piani doppi posseggono un fascio iperellittico, di genere $\pi > 1$ di curve. Essi contengono π , e solo π , differenziali totali di 1^a specie, linearmente indipendenti. La curva di diramazione del piano doppio si compone di $2\pi + 2$ curve di un medesimo fascio (quello corrispondente doppiamente al fascio iperellittico), spoglie delle loro eventuali componenti multiple, contate il massimo numero pari di volte possibile. Anzi, il numero di quelle curve può

(¹) Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

(²) Per queste ed altre esclusioni vedasi la Memoria del sig. H. Lacaze, *Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques* (Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1901).

ridursi a $2\pi + 1$ se il fascio di curve piane predetto contiene totalmente una curva contata 2 volte.

Rimane dubbio se, oltre ai piani doppi possedenti un fascio ellittico di curve, cioè la cui curva di diramazione si compone di 4 curve di uno stesso fascio, spoglie delle loro eventuali componenti multiple contate il massimo numero di volte possibile (delle quali componenti multiple alcune possono formare una curva totale del fascio), esistano piani doppi possedenti *un solo* differenziale totale di 1^a specie.

1. Sia $z^2 = \psi(x, y)$ una superficie (*piano doppio*) dotata di un differenziale totale di 1^a specie $Rdx + Sdy$, ove R ed S sono funzioni razionali di x, y, z , essendo poi $\psi(x, y)$ una funzione razionale intera di x, y ; di grado $2p + 2$ (1). Tenendo conto della relazione $z^2 = \psi$, tale differenziale può mettersi sotto la forma $\left(\frac{R_1}{z} + R_2\right)dx + \left(\frac{S_1}{z} + S_2\right)dy$, ove R_1, R_2, S_1, S_2 sono funzioni razionali di x, y . Poichè la superficie ammette la trasformazione birazionale in sè (simmetria) $x' = x, y' = y, z' = -z$ anche il differenziale $\left(-\frac{R_1}{z} + R_2\right)dx + \left(-\frac{S_1}{z} + S_2\right)dy$ è totale e di 1^a specie, sulla superficie, sicchè la somma dei due differenziali precedenti, $2(R_2 dx + S_2 dy)$, dev'essere un differenziale totale di 1^a specie. Ma in esso non figura z , quindi, non potendo il piano x, y , possedere di tali differenziali (di 1^a specie), occorre che sia $R_2 = S_2 = 0$. Ponendo dunque $R_1 = P, S_1 = Q$, il nostro differenziale sarà della forma $\frac{P dx + Q dy}{\sqrt{\psi}}$, essendo P e Q funzioni razionali di x, y .

Per dire qualche cosa di più riguardo alla struttura di P e Q , cominciamo dall'osservare che, dato ad y un valor costante, \bar{y} , il nostro differenziale riducesi a $\frac{P dx}{\sqrt{\psi}}$, che deve essere un differenziale iperellittico di 1^a specie relativo alla curva $z^2 = \psi(x, \bar{y})$, la quale è, al massimo, di genere p ; sicchè P sarà, rispetto ad x , intera e di grado $p - 1$, al massimo.

Porremo dunque

$$P = a_0 x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \dots + a_{p-2} x + a_{p-1},$$

ove i coefficienti a_0, a_1, \dots, a_{p-1} sono funzioni razionali della sola y .

Se, per un valor finito b di y , qualcuna delle funzioni a_i avesse un polo, denotando con r il massimo ordine di molteplicità di tal polo per le a_i , avremmo,

$$a_i = \frac{G_i(y)}{(y - b)^r},$$

(1) S'intende sempre che ψ non contiene, com'è lecito supporre (potendosi ciò ottenere con una trasformazione birazionale della superficie), come fattori, potenze, ad esponente > 1 , di polinomi.

ove le $G_i(y)$ sarebbero funzioni razionali di y olomorfe nell'intorno di $y = b$, delle quali una almeno sarebbe, nel punto $y = b$, diversa da 0.

Potremmo allora scegliere un cammino cosiffatto, x_0, x_1 , che fosse

$$\sum_{i=0}^{p-1} G_i(b) \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^{p-i-1} dx}{\sqrt{\psi(x, b)}} \neq 0.$$

Allora non sarebbe certo finito il $\lim_{y=b} \int_{x_0}^{x_1} \frac{P dx}{\sqrt{\psi(x, y)}}$, contro l'ipotesi che il differenziale sia di 1^a specie su tutta la superficie. Dunque le funzioni a_i sono prive di poli a distanza finita e quindi, oltre ad essere, come sappiamo, razionali, sono intere. Lo stesso ragionamento può ripetersi per Q , e si conchiude che P e Q sono funzioni razionali intere di x e di y , la prima, rispetto ad x , di grado $p-1$ al massimo, la seconda rispetto ad y , di grado $p-1$ al massimo.

Raccogliamo in P e Q i termini che sono, al massimo, di grado $p-1$, complessivamente, in x, y e sia, con ciò,

$$P = P_1 + A, \quad Q = Q_1 + E,$$

P_1 e Q_1 essendo complessivamente in x, y di grado $p-1$ al massimo e A, E non contenendo termini di grado minore di p .

Ponendo $y = \mu x$ (μ costante) il nostro differenziale si riduce sotto la forma

$$\frac{(\bar{P}_1 + \mu \bar{Q}_1) + x^p (\bar{A} + \mu \bar{E})}{\sqrt{\bar{\psi}}} dx,$$

ove con $\bar{P}_1, \bar{Q}_1, \bar{\psi}$ denotiamo i valori di P_1, Q_1, ψ per $y = \mu x$, e con \bar{A}, \bar{E} i polinomi, interi in x , $\frac{A(x, \mu x)}{x^p}, \frac{E(x, \mu x)}{x^p}$. Il differenziale precedente dev'essere un differenziale iperellittico di 1^a specie relativo alla curva $z^2 = \psi(x, \mu x)$, la quale è al più di genere p . Dev'essere dunque, per qualsiasi valore di μ e di x , $\bar{A} + \mu \bar{E} = 0$, cioè, riponendo per μ il valore $\frac{y}{x}$ e moltiplicando per x^{p+1} , $Ax + Ey = 0$.

Sicchè sarà $A = yF$, $E = -xF$, essendo F una funzione razionale intera di x, y i cui termini sono, al minimo, di grado $p-1$, complessivamente, in x, y . E con ciò il differenziale prende la forma

$$\frac{P_1 dx + Q_1 dy + F(y dx - x dy)}{\sqrt{\psi}}$$

Poniamo ora $y = \mu x + \nu$. Il differenziale precedente diviene (μ e ν essendo costanti)

$$(a) \quad \frac{\overline{P}_1 + \mu \overline{Q}_1 + \nu \overline{F}}{\sqrt{\psi}} dx,$$

ove $\overline{P}_1, \overline{Q}_1, \overline{F}$ sono i valori di P_1, Q_1, F per $y = \mu x + \nu$. Separiamo in F i termini di grado $p-1$ da quelli di grado più alto, sia cioè $F = G + S$, ove G è una forma binaria di grado $p-1$ ed S un polinomio i cui termini sono tutti di grado maggiore di $p-1$. Osservisi che, essendo

$$S(x, y+h) = S(x, y) + h \frac{\partial S}{\partial y} + \dots,$$

è

$$S(x, \mu x + \nu) = x^p S'(x, \mu) + \nu \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)_{y=\mu x} + \dots$$

ove $S'(x, \mu)$ è un polinomio intero in x . Dovendo essere (a) un differenziale iperellittico relativo alla curva $z^2 = \psi(x, \mu x + \nu)$, di genere p al massimo, deve, per l'arbitrarietà di ν , essere 0 $S'(x, \mu)$, e quindi anche $S(x, y) = 0$, qualunque sieno x ed y , donde F si riduce a G , cioè ad una forma binaria di grado $p-1$. Si conchiude perciò che:

Qualunque differenziale totale di 1^a specie relativo al piano doppio $z^2 = \psi(x, y)$ dev'essere della forma:

$$\frac{P_1 dx + Q_1 dy + F(y dx - x dy)}{\sqrt{\psi}}$$

ove P_1, Q_1 sono polinomi di grado $p-1$, al massimo, in x, y , ed F è una forma binaria di grado $p-1$ in x, y (che può eventualmente, ridursi a 0).

Per ciò che in seguito dovremo dire basterà tenere il differenziale sotto la forma

$$(1) \quad \frac{P dx + Q dy}{\sqrt{\psi}}$$

tenendo presente che P e Q sono, al massimo, di grado p , essendo ψ di grado $2p+2$.

2. Tenendo presente che (1) dev'essere un differenziale totale e che quindi $\frac{\partial}{\partial y} \frac{P}{\sqrt{\psi}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q}{\sqrt{\psi}}$, si ha l'equazione

$$(2) \quad P\psi_y - Q\psi_x = 2\psi(P_y - Q_x),$$

ove con f_x, f_y si denotino le derivate parziali di una funzione f , rispetto ad x e ad y .

Consideriamo, insieme alla (2), l'equazione differenziale

$$(3) \quad P dx + Q dy = 0$$

e supponiamo, per un momento, che essa ammetta un integrale generale della forma

$$\lambda = \frac{U(x, y)}{V(x, y)},$$

U e V essendo funzioni razionali intere e λ una costante arbitraria: in altri termini supponiamo che le curve integrali della (3) costituiscano il fascio di curve algebriche $U - \lambda V = 0$. Il differenziale (esatto) $d\lambda = d\frac{U}{V}$ differisce allora da $P dx + Q dy$ per un fattore finito, necessariamente razionale, $\frac{\mu}{\omega}$, ove ω, μ sono polinomi interi in x, y . Poichè, per ipotesi, $\frac{\mu}{\omega}$ e $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ sono due fattori integranti del differenziale $P dx + Q dy$, necessariamente distinti, il loro quoziente, cioè $\frac{\mu}{\omega} \sqrt{\psi}$, è, com'è noto, funzione dell'integrale $\lambda = \frac{U}{V}$. Sicchè fra $g = \frac{\mu^2}{\omega^2} \psi$ e $\lambda = \frac{U}{V}$ passerà una relazione. Per trovarla, eliminiamo la x fra le due equazioni algebriche $g = \frac{\mu^2}{\omega^2} \psi$, $\lambda = \frac{U}{V}$ (g e λ essendo costanti arbitrarie). Si otterrà così una relazione algebrica fra g, λ ed y ; ma, poichè g è funzione della sola λ, y non potrà comparire in tale relazione. Sicchè fra λ e g passerà una relazione *algebrica* del tipo

$$\Phi(\lambda, g) = 0,$$

$\Phi(\lambda, g)$ essendo un polinomio intero in λ e g , non identicamente nullo.

Siamo sicuri che $\Phi\left(\frac{U}{V}, \frac{\mu^2}{\omega^2} \psi\right)$ si annulla identicamente. Se consideriamo nel piano (λ, g) la curva di equazione $\Phi(\lambda, g) = 0$, concesso anche, per un momento, che essa sia riducibile, possiamo sempre considerarne la parte irriducibile

$$\varphi(\lambda, g) = 0$$

tale che $\varphi\left(\frac{U}{V}, \frac{\mu^2}{\omega^2} \psi\right)$ si annulli identicamente. La curva $\varphi(\lambda, g) = 0$ è certo razionale, perchè altrimenti noi potremmo considerare un differenziale abeliano di 1^a specie $R d\lambda$ legato a tale curva (R funzione razionale di λ e g che non s'annulla identicamente sui punti di quella curva). Allora, riponendo

per λ e g i valori $\frac{U}{V}$, $\frac{\mu^2}{\omega^2} \psi$, si otterrebbe un differenziale totale di 1^a specie $\frac{R}{V^2} (VdU - UdV)$ relativo al piano x, y e non identicamente nullo, il che è assurdo. Si può dunque scegliere una funzione razionale t di x e di y tale che g e λ , cioè $\frac{\mu^2}{\omega^2} \psi$, $\frac{U}{V}$, siano funzioni razionali di t . Si abbia dunque:

$$\frac{\mu^2}{\omega^2} \psi = A(t) \quad , \quad \frac{U}{V} = B(t) \quad , \quad t = \frac{\varrho}{v} \quad ,$$

ove $A(t)$, $B(t)$ sono funzioni razionali di t , e ϱ e v funzioni razionali intere di x, y , prime fra loro.

Il nostro differenziale totale di 1^a specie $\frac{Pdx + Qdy}{\sqrt{\psi}}$, che è eguale

a $\frac{d\frac{U}{V}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\omega^2} \psi}}$, perchè, per ipotesi, $d\frac{U}{V} = \frac{\mu}{\omega} (Pdx + Qdy)$, si riduce così al

differenziale abeliano $\frac{B'(t)dt}{\sqrt{A(t)}}$, relativo alla curva $\zeta^2 = A(t)$, del piano ζ, t .

Poichè tale differenziale dev'essere di 1^a specie, il genere della curva $\zeta^2 = A(t)$, evidentemente irreducibile perchè $A(t)$ non è un quadrato (tale non essendo ψ), è almeno 1, sicchè tale curva è ellittica od iperellittica. Intanto osserviamo che sulla nostra superficie, $z^2 = \psi(x, y)$, ad ogni curva del fascio $\varrho - tv = 0$, del piano x, y , corrispondono le due curve ove la superficie è incontrata contemporaneamente dal cono (cilindro) $\varrho - tv = 0$ e rispettivamente, dalle due superficie $z = \frac{\omega}{\mu} \sqrt{A(t)}$, $z = -\frac{\omega}{\mu} \sqrt{A(t)}$. La serie algebrica ∞^1 di tali curve è un fascio ed è in corrispondenza birazionale colla serie di punti della curva $\zeta^2 = A(t)$; quindi la superficie $z^2 = \psi(x, y)$ possiede un fascio ellittico od iperellittico di curve le cui immagini (doppie) sul piano x, y sono le curve del fascio $\varrho - tv = 0$.

Viceversa, una tal superficie possiede, com'è noto, differenziali totali di 1^a specie.

Riassumendo:

Se la superficie $z^2 = \psi(x, y)$ possiede il differenziale totale di 1^a specie $\frac{Pdx + Qdy}{z}$, e l'integrale generale dell'equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$ è della forma $\lambda = R(x, y)$, ove R è simbolo di funzione razionale e λ costante arbitraria, la superficie contiene un fascio ellittico od iperellittico di curve.

3. Vogliamo contare, perchè ciò interessa in seguito, quanti siano, nel nostro caso, i differenziali totali esistenti sulla superficie e linearmente indipendenti. Anzitutto occorre premettere il seguente

LEMMA: Sulla superficie $z^2 = \psi(x, y)$ (piano doppio) non possono esistere due integrali di differenziali totali di 1^a specie che non siano l'uno funzione dell'altro.

Difatti, se

$$I = \int \frac{P dx + Q dy}{\sqrt{\psi}}, \quad J = \int \frac{P' dx + Q' dy}{\sqrt{\psi}}$$

sono due integrali siffatti, sarà (per la (2) del n. 2)

$$P\psi_y - Q\psi_x = 2\psi(P_y - Q_x)$$

$$P'\psi_y - Q'\psi_x = 2\psi(P'_y - Q'_x)$$

donde

$$(PQ' - P'Q)\psi_x = 2\psi A$$

$$(PQ' - P'Q)\psi_y = 2\psi B,$$

essendo A e B due certi polinomi interi.

Ora si osservi che, essendo $\psi = 0$, curva di diramazione del piano doppio, priva di componenti multiple, solo in un numero finito di punti di essa curva si annullano contemporaneamente ψ_x e ψ_y . In tutti gli altri punti di $\psi = 0$ deve essere $PQ' - P'Q = 0$.

E, poichè ψ è di grado $2p + 2$ mentre $PQ' - P'Q$ e, al massimo, di grado $2p$, dev'essere, identicamente $PQ' - P'Q = 0$ donde l'integrale J è funzione di I.

Premesso questo lemma, se la superficie possiede un fascio ellittico od iperellittico, i differenziali totali di 1^a specie da essa posseduti sono quelli (e solo quelli) i quali provengono dai differenziali iperellittici legati a tale fascio (considerato come ente algebrico ∞^1). Se π è il genere del fascio, il numero di quelli linearmente indipendenti è dunque π .

4. Ora passiamo al teorema che è scopo di questa Nota.

Supponiamo che la superficie $z^2 = \psi(x, y)$ possenga due differenziali totali di 1^a specie, linearmente indipendenti,

$$\frac{P dx + Q dy}{\sqrt{\psi}}, \quad \frac{P' dx + Q' dy}{\sqrt{\psi}}.$$

Allora, come abbiám visto (n. 3), $PQ' - P'Q = 0$, cioè $\frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'}$. Denotando con $\frac{G}{G'}$ la frazione irriducibile valore comune di $\frac{P}{P'}$ e $\frac{Q}{Q'}$, sarà

dunque

$$P = GH, \quad P' = G'H, \quad Q = GK, \quad Q' = G'K,$$

H e K essendo polinomi. Allora il differenziale $H dx + K dy$ ammette come fattori integranti tanto $\frac{G}{\sqrt{\psi}}$ che $\frac{G'}{\sqrt{\psi}}$.

Segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale $Hdx + Kdy = 0$, o, ciò che è lo stesso, $Pdx + Qdy = 0$, è $\lambda = \frac{G}{G'}$. Siamo dunque nel caso contemplato nel n. precedente. Si conchiude dunque che:

Se il piano doppio $z^2 = \psi(x, y)$ possiede almeno due differenziali totali di prima specie, esso possiede un fascio iperellittico di curve. Se $\pi (> 1)$ è il genere di tal fascio, π è anche il numero dei differenziali totali di 1^a specie, linearmente indipendenti, appartenenti alla superficie. E la curva di diramazione del piano doppio consta (com'è noto) di $2\pi + 2$ curve appartenenti ad un medesimo fascio irriducibile di curve piane, private delle loro eventuali componenti multiple, contate il massimo numero pari di volte possibile. Anzi, se tal fascio contiene totalmente una curva contata 2 volte, il numero delle curve del fascio di cui componesi la curva di diramazione può ridursi a $2\pi + 1$.

Matematica. — *Sulla rappresentazione in modo conforme-coniugato di una superficie su di un'altra.* Nota del dott. UBALDO BARBIERI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Il problema generale: *ricercare se esistono superficie rappresentabili su altre in modo conforme-coniugato* per quanto importante, non ci risulta sia stato trattato da alcuno, se si toglie un breve cenno che lo Stäckel dà su tale specie di rappresentazione in una sua Memoria inserita nei *Mathematische Annalen* del 1894.

In tale Memoria l'autore pone in equazione il problema, riferendo l'elemento lineare delle superficie alle linee assintotiche; le equazioni risultano, però, piuttosto complicate, e le superficie sferiche, le superficie d'area minima, e quelle su cui le assintotiche si tagliano sotto angolo costante e diverso da $\frac{\pi}{2}$, che l'autore dimostra godere dell'anzidetta proprietà, sono dedotte con considerazioni affatto estranee al detto sistema (1).

(1) In altri due lavori dello stesso autore, sulla teoria generale delle superficie (vedi *Leipzigische Berichte* 48 - (1896); 50 - (1898)) sono di nuovo accennate le superficie su cui le assintotiche si tagliano sotto angolo costante differente da $\frac{\pi}{2}$, e dimostrato che queste sono superficie di rotazione.

Nella presente ricerca io riduco il problema alla risoluzione di un sistema di equazioni di forma più trattabile, e che meglio si presta allo studio generale di esso.

Il metodo da me seguito mi porta, oltre che alle superficie sferiche, e d'area minima, alla determinazione di un'importante classe di superficie per le quali l'anzidetta rappresentazione è possibile.

È questa la classe delle superficie di rotazione.

Date due superficie S ed S_1 , supponiamo che sia possibile di fare una rappresentazione conforme di S_1 su S , in guisa che ad ogni sistema coniugato dell'una, corrisponda un sistema coniugato sull'altra.

Le linee di curvatura $u = \text{cost.}$ $v = \text{cost.}$ formando un sistema coniugato e ortogonale dovranno corrispondersi sulle due superficie; per conseguenza gli elementi lineari corrispondenti potranno porsi sotto la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= E du^2 + G dv^2 \\ ds_1^2 &= E_1 du^2 + G_1 dv^2, \end{aligned}$$

ed essendo la rappresentazione conforme dovremo avere

$$(1) \quad \frac{E_1}{E} = \frac{G_1}{G} = k(u, v).$$

Inoltre, dovendo fra loro corrispondersi i sistemi coniugati, si dovranno corrispondere anche le linee assintotiche, e viceversa; per cui indicando con

$$\begin{aligned} D du^2 + D' dv^2 \\ D_1 du^2 + D'_1 dv^2 \end{aligned}$$

le seconde forme fondamentali di S ed S_1 rispettivamente, dovrà essere

$$(2) \quad \frac{D_1}{D} = \frac{D'_1}{D'} = k_1(u, v).$$

Indichiamo con r_1 ed r_2 i raggi principali di curvatura della superficie S . Le due equazioni di Codazzi e di Gauss, relative a tale superficie, potranno scriversi, com'è noto, nel modo seguente ⁽¹⁾:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{r_2} \sqrt{E} \right) - \frac{1}{r_1} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r_1} \sqrt{G} \right) - \frac{1}{r_2} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} &= 0 \\ \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\} &= 0. \end{aligned} \right.$$

(1) L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, pag. 273, vol. I.

Tenuto conto delle relazioni (1) e (2), è facile vedere che queste equazioni scritte per la superficie S_1 diventano

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{k_1}{\sqrt{k}} \right) - \frac{k_1}{\sqrt{k}} \frac{1}{r_1} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial v} &= 0 \\ \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{k_1}{\sqrt{k}} \right) - \frac{k_1}{\sqrt{k}} \frac{1}{r_2} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial u} &= 0 \\ \frac{k_1^2}{k} \frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{1}{E} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial u} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{1}{G} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial v} \right) \right\} &= 0; \end{aligned} \right.$$

ossia

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r_2} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{r_1} x \frac{\partial y}{\partial v} &= 0 \\ \frac{1}{r_1} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{r_2} x \frac{\partial y}{\partial u} &= 0 \\ x^2 \frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{E} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{G} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \right\} &= 0, \end{aligned} \right.$$

avendo posto

$$(6) \quad \frac{k_1}{\sqrt{k}} = x \quad \text{e} \quad \log \sqrt{k} = y.$$

Se, dunque, consideriamo data la superficie S , la ricerca delle superficie S_1 , rappresentabili in modo conforme-coniugato su S , dipendendo dalla conoscenza dei moltiplicatori k e k_1 , è ridotta allo studio del sistema (5).

Pertanto, dalle due prime equazioni si trae

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{r_1}{r_2} \frac{\partial \log x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial \log x}{\partial u} \end{aligned} \right.$$

Onde l'ultima diviene

$$x^2 \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{r_2}{E} \frac{\partial \log x}{r_1} \frac{\partial \log x}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{r_1}{G} \frac{\partial \log x}{r_2} \frac{\partial \log x}{\partial v} \right) \right\} - \frac{1}{r_1 r_2} = 0.$$

Eliminando poi y dalle (7) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{\partial \log x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_2}{r_1} \frac{\partial \log x}{\partial u} \right) = 0.$$

Avremo, così, il seguente sistema di due equazioni del secondo ordine a cui deve soddisfare la x :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{\partial \log x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_2}{r_1} \frac{\partial \log x}{\partial u} \right) = 0 \\ \frac{1}{r_1 r_2} x^2 + \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial \log x}{\partial u} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{\frac{E}{G}} \frac{r_1}{r_2} \frac{\partial \log x}{\partial v} \right) \right\} - \frac{1}{r_1 r_2} = 0. \end{cases}$$

Determinato, quando sia possibile, un integrale x di questo sistema, le (7) permetteranno di ottenere y per quadrature.

Si vede, dunque, che la ricerca delle superficie S_1 rappresentabili in modo conforme-coniugato sulla data superficie S , è ridotta allo studio del sistema (8).

Si ponga $\log x = z$; e si indichino con p, q, r, s, t le derivate parziali di 1° e 2° ordine per la funzione $z(u, v)$; è facile vedere che il sistema (8) si trasformerà allora nel seguente:

$$(9) \quad \begin{cases} s \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right) + q \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - p \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = 0 \\ r \frac{1}{E} \frac{r_2}{r_1} + p \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \right) + t \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{1}{G} \right) + \\ + q \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{E}{G}} \right) + \frac{1}{r_1 r_2} (e^{2z} - 1) = 0. \end{cases}$$

A questo punto occorre osservare che se

$$\frac{r_1}{r_2} = \pm 1,$$

la prima equazione è identicamente soddisfatta; il sistema precedente si riduce perciò ad una sola equazione, onde se ne conclude che in tal caso esisteranno di certo superficie rappresentabili su S in modo conforme-coniugato.

Al caso di $\frac{r_1}{r_2} = +1$ corrisponde la sfera, che non ha per noi interesse; al caso, invece, di $\frac{r_1}{r_2} = -1$ corrispondono le superficie d'area minima, caso evidente *a priori*, costituendo le assintotiche su queste superficie un sistema ortogonale ed isoterma.

Escludendo, allora, queste due classi di superficie, supporremo

$$\frac{r_1}{r_2} \neq \pm 1.$$

Dalle (9) potremo quindi trarre per s e t le espressioni seguenti:

$$(10) \quad \begin{cases} s = p \frac{r_1 r_2}{r_1^2 - r_2^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - q \frac{r_2 r_1}{r_1^2 - r_2^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \\ t = -\frac{1}{r_1^2} G e^{2z} - p \frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \right) - \\ \quad - q \frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{E}{G}} \right) - \frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{G}{E} r + \frac{G}{r_1^2}. \end{cases}$$

Per vedere se queste due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ammettono o no, una soluzione comune $z(u, v)$, si può seguire il il metodo indicato dal prof. Bianchi (¹).

I calcoli che s'incontrano, data la forma complessa delle (10), risultano, però, assai lunghi e complicati; talchè io non ho potuto finora trarne partito per risolvere il problema in modo completo.

Dalla complicazione delle condizioni necessarie a che il problema ammetta sempre soluzioni, si può, tuttavia, dedurre con sicurezza quasi completa che, in genere, data una qualunque superficie S , non ne esisterà un'altra S_1 rappresentabile su quella in modo conforme-coniugato.

Ho cercato, quindi, di dedurre per via indiretta qualche soluzione particolare del sistema (10).

Poniamo per semplicità detto sistema sotto la forma

$$(11) \quad \begin{cases} s = Ap + Bq \\ t = \alpha(e^{2z} - 1) + \beta p + \gamma q + \delta r, \end{cases}$$

e proponiamoci di ricercare se sia possibile soddisfare ad esso con una funzione di sola v .

(¹) *Sulle soluzioni comuni a due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.* Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 1886.

Ponendo

$$p = 0,$$

il sistema precedente diviene

$$(12) \quad \begin{cases} Bq = 0 \\ t = \alpha(e^{2z} - 1) + \gamma q. \end{cases}$$

Dalla prima equazione deduciamo che B o q dovranno esser nulli. Sia q , e quindi ancor t , uguale a zero: si avrà allora

$$\alpha(e^{2z} - 1) = 0,$$

donde, non potendo esser nullo α , ricaveremo

$$e^{2z} = 1,$$

dalla quale, per essere $z = \log x$ ne risulterà $x^2 = 1$; il che, del resto, poteva prevedersi *a priori*, considerando le (8): questo valore di x^2 ci porta alla rappresentazione per similitudine, priva per noi d'interesse.

Suppongasi ora

$$B = 0 \quad \text{e} \quad q, t \neq 0:$$

essendo

$$B = -\frac{r_1 r_2}{r_1^2 - r_2^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

ne risulterà che $\frac{r_1}{r_2}$ dovrà essere funzione di sola v .

La seconda equazione delle (12)

$$(13) \quad t = \alpha(e^{2z} - 1) + \gamma q,$$

diviene un'equazione alle derivate ordinarie, poichè in essa z , e quindi q e t , debbono essere funzioni di sola v .

Se α e γ sono funzioni di sola v , è chiaro che la condizione $z = f(v)$ per gl'integrali della (13) sarà di certo soddisfatta: ma per α e γ funzioni qualunque di u e v , non esisteranno, in genere, delle funzioni $z = f(v)$ che soddisfacciano alla detta equazione.

Si presenta, dunque, la questione di vedere a quali condizioni devono soddisfare α e γ , perchè la (13) abbia delle soluzioni $z = f(v)$.

Detta equazione ci indica per γ il valore

$$\gamma = V\alpha + V_1$$

essendo V e V_1 funzioni incognite di sola V .

Sostituendo tale espressione nella (13), se ne deduce

$$t - V_1 q = \alpha(Vq + e^{2z} - 1).$$

Se α non è funzione di sola v , caso già considerato, questa equazione non potrà essere soddisfatta se non è contemporaneamente

$$(13') \quad \begin{cases} t - V_1 q = 0 \\ Vq + e^{2z} - 1 = 0. \end{cases}$$

Cerchiamo allora le condizioni d'integrabilità di questo sistema.

Indichiamo con λ una funzione della sola v , e poniamo $V_1 = \frac{\lambda''}{\lambda'}$.

L'integrazione della 1^a equazione del sistema dà

$$q = a\lambda'$$

ossia

$$z = a\lambda + b$$

essendo a e b costanti.

Sostituendo questa espressione di z nella 2^a si trae

$$(14) \quad aV\lambda' + ce^{2a\lambda} - 1 = 0,$$

che dovrà essere soddisfatta per certi valori delle costanti arbitrarie che vi figurano.

Si conclude:

Affinchè il sistema (13') ammetta delle soluzioni (si esclude la soluzione $z = 0$ che per noi non ha interesse) è necessario e basta che i coefficienti V_1 e V siano legati da una relazione della forma (14).

E perciò:

L'equazione (13) ha delle soluzioni funzioni soltanto di v , in due casi:

1) quando α e γ sono funzioni unicamente di v .

2) quando α e γ , pur essendo funzioni di u e v , sono legati da una relazione della forma

$$\gamma = \frac{1 - ce^{2a\lambda}}{a\lambda'} \alpha + \frac{\lambda''}{\lambda'},$$

ove λ è funzione qualunque di v ; a e c costanti, ed α e γ hanno le espressioni

$$\alpha = -\frac{G}{r_1^2}, \quad \gamma = -\frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{E}{G}} \right).$$

Tralasciando questo secondo caso, ci occuperemo nella Nota presente, soltanto del primo.

Siano, dunque, α e γ funzioni di sola v , cioè

$$\frac{G}{r_1^2} = V, \quad \frac{r_2}{r_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{E}{G}} \right) = V_1.$$

La seconda equazione di Codazzi

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r_1} \sqrt{G} \right) - \frac{1}{r_2} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

si ridurrà a

$$\frac{1}{r_2} \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) = 0, \quad \text{da cui} \quad G = G(v);$$

segue subito allora

$$r_1 = r_1(v) \quad r_2 = r_2(v) \quad E = E(v).$$

L'elemento lineare della superficie S avrà quindi la forma

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

con E e G funzioni di sola v .

Posto allora $\sqrt{G} dv = dv_1$, si avrà

$$(15) \quad ds^2 = E_1 du^2 + dv_1^2,$$

con E_1 funzione di sola v_1 .

Questo è l'elemento lineare di una superficie applicabile su di una superficie di rotazione, di cui i meridiani e i paralleli sono rispettivamente dati da

$$u = \text{cost.}$$

$$v = \text{cost.}$$

I raggi principali di curvatura risultano, come appunto deve essere, funzioni di v , ossia di v_1 , parametro che individua i paralleli.

Se ne deduce, quindi, *che per ogni superficie di rotazione è possibile una rappresentazione conforme-coniugata su di altra superficie, la quale, evidentemente, non potrà essere che di rotazione anch'essa.*

Analogo risultato si ottiene supponendo la z funzione di sola u , e quindi $q = 0$.

In una prossima Nota tratteremo direttamente la risoluzione del problema per questa classe speciale di superficie.

Fisica matematica. — *Sopra i conduttori cavi.* Nota di E. ALMANZI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Fenomeni subbiettivi nelle esperienze sui raggi N.*
Nota del prof. E. SALVIONI, presentata dal Socio A. ROITI.

Nella speranza di poter un poco chiarire se il ripresentarsi di numeri presso a poco uguali nelle misure sui raggi N riferita in altra Nota ⁽¹⁾, dovesse attribuirsi al caso o a una causa regolatrice, mi ingolfai in lunghi calcoli di probabilità. Data una serie di m righe distribuite a caso su un tratto di l cm., a quante coincidenze darà luogo in media un'altra serie simile ripetuta un gran numero di volte, entro il limite $\pm a$ cm.? Vi è una certa arbitrarietà nel porre e nel risolvere la questione; la via da me seguita mi conduce alla formola

$$N = \frac{\sum_{r=1}^{r=m} r \binom{m}{r} \binom{n-m}{m-r}}{\binom{n}{m}}$$

dove è posto $\frac{l}{a} = n$. Ma il calcolo dei fattoriali che qui intervengono, anche facendo uso delle note formole che ne danno i logaritmi, è pressochè interminabile, essendo nel caso mio $m = 50$, e $n = 2000$ per $a = 0,01$: onde cercai applicarlo a tratti più brevi, e in via approssimata; se in questo calcolo non sono caduto in errore, chiamando q il rapporto fra il numero di coincidenze osservate entro $\pm a$ e quello calcolato, si avrebbe all'incirca

| a cm. | q |
|------------|-----|
| 0,01 | 4 |
| 0,02 | 3,6 |
| 0,03 | 2,6 |

Ma tenuto conto dell'arbitrarietà del calcolo per cui alle condizioni presupposte non corrispondono fedelmente quelle del caso concreto, tenuto conto del modo di procedere nelle osservazioni le quali non riescono indipendenti, tenuto conto dell'intervento di cause subiettive fisiologiche o psichiche determinate o provocate da una specie di vago ricordo o di aspettativa involontaria, e del loro probabile ripresentarsi con una certa regolarità, dal risultato non è possibile trarre una conclusione fondata.

Anche i fatti seguenti avvaloravano i dubbi:

1° Nel corso dell'esperienze avevo ripetutamente notato che impressioni simili di maggiore o minore nitidezza nel contorno del reticolato, si

(¹) V. pag. 610.

avevano anche a lampada spenta ⁽¹⁾, anche soppressa la lampada e la lente di quarzo, anche senza muovere lo schermo.

2° In presenza di un massimo per cui il reticolato (5×4 cm.) appariva più distinto, il fenomeno si avvertiva in quella qualsiasi parte di esso che si prendeva di mira e non nella sola regione che geometricamente corrispondeva alla immagine.

3° In ogni singola osservazione la posizione del massimo sembrava definita con gran precisione; mentre tale precisione è poco concepibile con la teoria geometrica, date le dimensioni della fenditura e della lente.

4° Si osservavano massimi anche nella regione dove verosimilmente cadrebbero le immagini corrispondenti alle radiazioni di Schumann che notoriamente sono assorbite dall'aria.

5° Nelle posizioni dei massimi non sempre l'interposizione di una lastra di piombo produceva l'effetto che doveva aspettarsi.

Queste considerazioni mi indussero a studiare con più attenzione i fenomeni subbiettivi che si ricevono, fissando con l'occhio un reticolato opaco su uno schermo fosforescente e l'influenza che sul giudizio esercita la suggestione. Il primo esame mi portò alla constatazione di due fatti che hanno senza dubbio influito nelle esperienze precedenti.

Il primo fatto consiste in ciò che quando nell'oscurità si osservano le maglie del reticolato sul fondo debolmente luminoso dello schermo, non è la maglia che si prende di mira quella che si vede più nitida: essa apparisce come velata da una nebbia, mentre le circostanti spiccano nitidamente. Del fenomeno che credetti nuovo mi ero dato una spiegazione, che nel mio caso ha un certo valore; nella camera scura prima di accingermi alle osservazioni tenevo accesa la fiamma di una candela per notare le posizioni del corsoio, e, nello spegnerla, non facevo a meno di fissarla per qualche istante; la *fovea* ne riceveva allora l'immagine, che doveva proiettarsi in oscuro, quando, rifatta l'oscurità fissavo lo schermo. Ma tale fenomeno fu già osservato dal Kries ⁽²⁾ su superficie luminose poco estese, il quale ne diede una spiegazione esauriente riferita dal Lummer e basata su fatti istologici. Attribuii subito a tale fatto una grande importanza nella interpretazione dei fenomeni e fui condotto a considerazioni identiche a quelle fatte dal Lummer ⁽³⁾, e che pertanto non ho più interesse di riferire. Dirò solo che ritornai alle esperienze precedenti, facendo il massimo sforzo per non mutare la direzione della visuale; la regione fissata andava diventando sempre più indecisa, ma l'osservazione, fatta con tale sforzo, provoca un senso di molestia che spinge

(¹) Fu già notato dal Blondlot e da lui attribuito a una specie di fosforescenza (C. R. T. 137, pag. 729).

(²) Lummer, Phys. Zeit. N. 5, 1904.

(³) Lummer, loc. cit.

irresistibilmente a modificare la direzione dell'occhio; le esperienze diventano estremamente faticose, e prolungate non mancherebbero di recar danno alla vista.

Un secondo fatto osservato può essere causa d'errore, se l'osservatore è miope e guarda senza lenti; consiste in ciò che, mentre con una illuminazione normale l'occhio distingue le maglie del reticolato con chiarezza poco diversa anche variandone la distanza, ciò non accade quando nell'oscurità si guarda il reticolato, disposto sullo schermo fosforescente, sul fondo fosforescente. In questo caso basta una piccola modificazione nella distanza o nello sforzo d'accomodamento, per modificare notevolmente la chiarezza della visione. Il mio occhio con una miopia di 2 diottrie e acuità normale, discerne le maglie del reticolato posto a 160 cm., con illuminazione ordinaria; nell'oscurità invece al di là di 40 cm. o poco più il reticolato scompare completamente in un fondo uniforme; e, tenendo lo schermo a distanza compresa fra il punto prossimo e il remoto, una variazione di pochi millimetri produce una variazione sensibile nella luminosità apparente e nella chiarezza dei contorni. Il fenomeno è evidentemente collegato col fatto ben noto che l'acutezza visiva diminuisce con le intensità d'illuminazione; ma questo però non par che basti a spiegarlo.

A queste due cause d'errore si accompagnano dei fenomeni di suggestione, ai quali le condizioni dell'esperienza, come nota il Lummer, sono particolarmente favorevoli. Così le esperienze precedenti lasciano un ricordo forse più preciso che non si pensi, e, quando si muove lo schermo alla ricerca dei massimi o si interpongono corpi fra essi e la sorgente, forse l'occhio, già inconsapevolmente esercitato, si dirige o si accomoda in modo da veder più o meno bene secondo l'aspettativa.

Messo così in guardia era naturale che io riprendessi l'esperienze precedenti, e in particolare quella fondamentale dell'effetto di schermi interposti con un metodo che eliminasse l'autosuggestione; e questo appunto ho fatto in questi ultimi tempi, valendomi di un aiuto. Questi aveva a sua disposizione quattro lastre (piombo, rame, alluminio, legno) che doveva interporre a suo piacimento e a mia insaputa, notando ogni volta la lastra presa; io d'altra parte notavo le corrispondenti impressioni. Ma, contro la mia aspettazione, anche condotta a questo modo l'esperienza non mi ha portato a conclusioni chiare. I casi in cui il giudizio corrispondeva allo schermo usato forse predominavano, ma non furono rari quelli decisamente contrari e numerosi quelli incerti; e i fenomeni d'immagazzinamento affermati dal Blondlot pur troppo si prestano a quella interpretazione che si vuol preferire: d'altra parte prolungando simili esperienze l'effetto della suggestione non è eliminato; inconsciamente assistente e osservatore finiscono a trovarsi in una condizione psichica consimile a quella di due giuocatori che tendono a indovinarsi il pensiero. Ma una circostanza più grave debbo aggiungere ed è *che da parecchio tempo*

non ho più potuto verificare su di me i fenomeni con quella chiarezza con la quale mi erano apparsi due o tre mesi or sono; e tanto più mi rimorde di non aver in quell'epoca tentato esperienze consimili.

In tali condizioni, come dissi sul principio, io non mi sento in grado di pronunciarmi sulle mie stesse esperienze; da una parte l'insuccesso avuto anche in principio coi metodi di confronto (n. 6), l'influenza indiscutibile di cause fisiologiche e psichiche (nn. 8, 9), l'esito poco chiaro delle ultime esperienze, l'insuccesso nei tentativi di dimostrazione obbiettiva (n. 3), sono ragioni che mi costringerebbero a attribuire i fenomeni a sole cause subbiettive; d'altra parte le coincidenze ripetute (n. 7) e il ricordo di impressioni ricevute con grande evidenza (n. 7), mi spingerebbero ad ammettere che ai fenomeni subbiettivi si sieno sovrapposti anche fenomeni obbiettivi.

In tale ipotesi sarei costretto a ritenere che l'osservazione esiga una particolare condizione di sensibilità, diversa non solo da persona a persona ⁽¹⁾, ma assai variabile nella stessa persona.

I fenomeni riferiti dal Blondlot, dal Charpentier, dal Macé de Lepinay, da E. Meyer e altri, e alcune strane proprietà, come l'immagazzinamento, l'azione delle onde sonore, la propagazione attraverso fili, hanno una singolare somiglianza coi pretesi fenomeni luminosi del così detto magnetismo animale ⁽²⁾, che la scienza ha ripudiato; anche quei fenomeni non sarebbero percepiti che dai così detti sensitivi. Ma l'inoltrarsi in considerazioni di questo genere sarebbe contrario alle buone norme dell'indagine scientifica.

Fisica. — *Influenza della pressione del soffio nella elettrizzazione per gorgoglio d'aria nell'acqua pura ed in alcune soluzioni acide e saline.* Nota del dott. UMBERTO PIVA, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

⁽¹⁾ Servendomi dell'app. descritto al § 6a) che ho a tal uopo modificato mi propongo di tentare qualche ricerca in questo indirizzo.

⁽²⁾ Vedi p. es. H. Durville, *Traité exp. de Magn.*, t. 2, pag. 272.

Geografia fisica. — *Sulla previsione delle piene dei fiumi in Sicilia.* Nota del dott. FILIPPO EREDIA, presentata dal Corrispondente E. MILLOSEVICH ⁽¹⁾.

Come è noto, la Sicilia è per la massima parte, costituita geologicamente da terreni non permeabili, onde molto di frequente le acque piovane attraversando le varie insenature del terreno, aumentano notevolmente la portata dei torrenti, i quali alla loro volta ne ingrossano i fiumi, provocando delle piene spaventevoli, che arrecano molti danni. Danni materiali immediati, in quanto che distruggono le opere edilizie che incontrano; danni che si traducono in perdite rilevanti per l'agricoltura, poichè, come è stato provato da Boussingault, le acque del fiume che dopo la piena sboccano al mare, contengono un eccesso di acido azotico proveniente dal fatto che esse hanno lavato i terreni inondati carichi di azotati.

Poter prevedere l'accrescimento delle acque di un fiume è molto vantaggioso, poichè con precedenza si potranno prendere quei provvedimenti che il caso richiede.

È da poco tempo che i tecnici procurano di prevedere le fasi di una piena a partire dal suo inizio, e il problema si presenta facile a risolversi quando si è in presenza di fiumi brevi e limitati e nei quali nessuno affluente importante viene a turbare il regime delle piene.

Se rappresentiamo graficamente le varie fasi delle piene ⁽²⁾ prendendo sull'asse delle ascisse i tempi e sull'asse delle ordinate le altezze di acqua osservate, e se estendiamo tale rappresentazione alle singole stazioni disposte lungo il pendio, con facilità potremo rilevare lo spostamento che subisce il colmo della piena a mano a mano che scende e anche il tempo che il colmo stesso impiega a propagarsi da una stazione ad un'altra qualsiasi.

Se si eseguisce il predetto esame per diverse piene, si nota che le curve effettive delle piene conservano un certo parallelismo.

Sicchè, se si immagina tracciata una curva ipotetica che abbia la direzione media delle curve effettive, questa curva potrà servire per la previsione delle piene future, poichè potrà fornirne il loro probabile andamento.

Allora, quando il telegrafo ci comunica l'altezza idrometrica della stazione a monte, mediante questa quota e quella corrispondente della stazione a valle, si determina sul grafico un primo punto effettivo della piena e se per

(1) Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

(2) Ing. Carlo Valentini, *La previsione delle piene del Po*. Roma, Tipo-litografia del Genio Civile, 1903.

questo punto facciamo passare una linea parallela alla curva media delle curve effettive, abbiamo la curva sulla quale probabilmente trovasi ogni punto successivo della piena. Di mano in mano che arrivano comunicazioni di altezze idrometriche, si determineranno nuovi punti che serviranno a rettificare la curva precedentemente tracciata.

Se mettiamo in relazione l'andamento delle piogge con l'andamento delle piene troviamo una stretta correlazione, ed è già stato constatato per diversi bacini e per primo pare da Guillemain per la Loira, che l'intera quantità di precipitazione non affluisce subito al fiume, perchè oltre il consumo per la evaporazione, essa va prima ad impinguare lo strato del sottosuolo e dopo un certo tempo, dopo che il suolo è divenuto saturo, l'acqua va al fiume ad aumentare il deflusso.

Per il bacino della Dordogna sono stati utilizzati tali concetti ed esiste da vario tempo un servizio organizzato per la previsione delle piene⁽¹⁾. Si sono istituite delle stazioni nei diversi punti del bacino e allorchando si nota l'accrescimento delle acque al di sopra di un'altezza determinata, le persone cui è affidato tale ufficio ne avvisano per telegrafo i funzionari incaricati degli annunci. Si ritiene anche conto delle grandi piogge che cadono sul dipartimento.

Ma quando i fiumi scendono per forte pendenza su rocce impermeabili, poichè su tali terreni l'acqua rimane alla superficie, è essa causa quasi esclusiva della produzione delle piene. Gli aumenti della portata di questi fiumi sono prodotti da una sola caduta di acqua che raggiunge in pochi giorni enormi proporzioni, ed è necessario allora organizzare il servizio delle previsioni basandosi più che altro sulla quantità di precipitazione.

In queste condizioni è necessario sapere immediatamente ciò che si prepara per mezzo di osservazioni pluviometriche fatte nei punti più elevati del bacino dove avvengono alluvioni. E per non essere presi alla sprovvista è necessario, come ha fatto vedere Imbeaux per la Durance, consultare quotidianamente la disposizione barica sulla regione tenendo dietro ai Bollettini Meteorici che gli Uffici Centrali giornalmente pubblicano.

Come è noto, le carte del tempo che gli Uffici Centrali di Meteorologia in tutti gli Stati pubblicano giornalmente, indicano che le aree di bassa e di alta pressione subiscono degli spostamenti successivi. E se si seguono le posizioni che successivamente va a occupare un centro di depressione, non si stenta a riconoscere che la sua traiettoria è generalmente diretta da ovest-sud-ovest a est-nord-est.

Però non tutte le regioni sono ugualmente influenzate dalle basse pressioni che dominano in un certo istante, e non tutte le regioni hanno le mag-

(1) G. Lemoine, *Étude sur l'hydrologie du bassin de la Dordogne*. Annuaire de la Société météorologique de France. Février 1902.

giori piogge con una stessa disposizione barometrica. Per potere realizzare una previsione basandosi sulle cadute di piogge, è necessario sapere quali disposizioni bariche ci portano con molta probabilità, abbondanza di precipitazione. Venuti in possesso di tale conoscenza, rimane agevole allora, seguendo le carte quotidiane del tempo, prevedere le cadute di abbondante precipitazione.

Esaminiamo quali sono le condizioni bariche che con molta probabilità apportano cadute di abbondante precipitazione in Sicilia.

La maggior parte delle depressioni che approdano al continente europeo vengono dall'Atlantico. Alcune passano al nord della Scozia, altre raggiungono la Gran Bretagna o la Francia o la Spagna. Altre penetrano nel basso Mediterraneo, altre infine, molto più rare, camminano sul Sahara e raggiungono il sud dell'Algeria. Oltre le depressioni che arrivano dall'Atlantico, si osserva che se ne formano altre spontaneamente, ed è molto importante quella che nel Mediterraneo si forma nelle vicinanze del golfo di Genova. Altre infine sembrano risultare dalla presenza al NW dell'Europa delle depressioni profonde, che sono per così dire di satelliti e che si chiamano depressioni secondarie.

Per vedere quali depressioni influiscono maggiormente per la precipitazione acquee, ho esaminato le serie di osservazioni pluviometriche eseguite dal 1892 al 1902 nelle città di Messina, Riposto, Catania, Siracusa, Mineo, Girgenti, Caltanissetta e Trapani; e dai singoli Direttori mi furono, a mia richiesta, gentilmente comunicati i giorni durante i quali si registrò una pioggia da 20 millimetri in su e la quantità di precipitazione registrata in ciascuno dei detti giorni.

In varie tabelle, che per brevità non riporto, furono ordinati tutti questi dati ottenuti, e accanto alla precipitazione registrata si notò l'alta e la bassa pressione che durante quel tempo dominava.

Per esaminare la distribuzione barometrica si consultarono il Bollettino Meteorico dell'Ufficio Centrale di Meteorologia di Roma e il Bollettino Meteorico dell'Ufficio Centrale di Algeri.

Si ottennero in questo modo 12 tabelle, dalle quali risultò subito come i tipi barici dominanti si potevano dividere in due categorie ben distinte e che noi denotiamo con i simboli A_1 e A_2 . Sotto il simbolo A_1 riferiamo quella disposizione barica, la quale è caratterizzata da un'alta pressione al N, o NW, o NE e da una bassa pressione situata o al S d'Italia, o sulla Tunisia, o Algeria. Sotto il simbolo A_2 riferiamo quella disposizione la quale è caratterizzata da un'alta pressione situata nelle latitudini settentrionali e da una bassa pressione situata o sull'Italia centrale, o sul Mare Tirreno o sull'Adriatico.

Allora, per riunire sinteticamente i nostri dati, si formulò il quadro qui sotto riportato, dove per ciascun mese dell'anno e per ciascuna città si trova indicato il numero delle volte che la caduta della pioggia è stata accompa-

gnata dalla disposizione barometrica A_1 o dalla disposizione barometrica A_2 .

| | Messina | | Riposto | | Catania | | Siracusa | | Mineo | | Girgenti | | Caltanissetta | | Trapani | |
|---------------------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|----------|-------|-------|-------|----------|-------|---------------|-------|---------|-------|
| | A_1 | A_2 | A_1 | A_2 | A_1 | A_2 | A_1 | A_2 | A_1 | A_2 | A_1 | A_2 | A_1 | A_2 | A_1 | A_2 |
| Gennaio | 7 | 5 | 6 | 1 | 14 | 0 | 11 | 0 | 6 | 1 | 1 | 1 | 6 | 14 | 0 | 3 |
| Febbraio | 3 | 1 | 12 | 1 | 9 | 0 | 6 | 2 | 6 | 3 | 0 | 1 | 1 | 9 | 1 | 5 |
| Marzo | 3 | 3 | 4 | 2 | 7 | 0 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 6 | 2 | 4 |
| Aprile | 4 | 7 | 2 | 3 | 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 | 4 |
| Maggio | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| Giugno | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Luglio | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Agosto | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| Settembre | 2 | 3 | 5 | 2 | 6 | 0 | 5 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| Ottobre | 8 | 10 | 11 | 7 | 10 | 3 | 10 | 6 | 6 | 5 | 4 | 7 | 5 | 7 | 3 | 13 |
| Novembre | 10 | 7 | 12 | 1 | 21 | 0 | 19 | 7 | 7 | 3 | 7 | 4 | 6 | 7 | 3 | 8 |
| Dicembre | 4 | 8 | 7 | 9 | 11 | 4 | 12 | 5 | 9 | 6 | 4 | 5 | 8 | 12 | 1 | 3 |
| Totale | 47 | 46 | 63 | 27 | 83 | 9 | 73 | 25 | 44 | 24 | 20 | 23 | 35 | 68 | 14 | 47 |

Esaminando le cifre riportate nel predetto quadro, apparisce evidente la relazione con le due diverse distribuzioni nei varî mesi. Per Catania sono rarissime le piogge apportate dalla distribuzione barometrica tipo A_2 , mentre sono numerose le piogge apportate dalla distribuzione barometrica A_1 . Per Riposto, Siracusa e Mineo troviamo che si rende un po' più manifesta la preponderanza della disposizione A_1 , e quantunque il numero delle piogge accompagnate dalla disposizione A_2 sia discreto, non si può sconoscere che la maggioranza delle precipitazioni è accompagnata dalla disposizione A_1 .

Girgenti e Messina risentono tanto l'influsso della disposizione A_1 quanto della disposizione A_2 con una probabilità maggiore di quest'ultima disposizione.

Caltanissetta e Trapani hanno le maggiori precipitazioni colla disposizione A_2 .

Per renderci conto della quantità di precipitazione che colle nostre osservazioni si sono esaminate, abbiamo formulato il quadro che segue:

| | Messina | | Riposto | | Catania | | Siracusa | | Mineo | | Girgenti | | Caltanissetta | | Trapani | |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | A ₁ | A ₂ | A ₁ | A ₂ | A ₁ | A ₂ | A ₁ | A ₂ | A ₁ | A ₂ | A ₁ | A ₂ | A ₁ | A ₂ | A ₁ | A ₂ |
| Gennaio . | 184,0 | 120,0 | 212,6 | 25,2 | 462,0 | 0 | 408,3 | 0 | 298,2 | 29,0 | 50,2 | 38,0 | 364,5 | 519,0 | 0 | 78,7 |
| Febbraio . | 93,0 | 40,0 | 429,2 | 19,6 | 144,0 | 0 | 238,8 | 48,0 | 347,7 | 58,5 | 0 | 36,5 | 31,0 | 254,0 | 20,5 | 127,0 |
| Marzo . . | 99,0 | 96,0 | 120,0 | 58,6 | 276,4 | 0 | 113,9 | 19,5 | 153,6 | 81,8 | 21,0 | 20,6 | 87,0 | 214,0 | 45,5 | 99,3 |
| Aprile . . | 118,0 | 187,0 | 66,6 | 70,8 | 87,7 | 33,0 | 137,9 | 25,0 | 262,2 | 25,3 | 0 | 22,0 | 131,0 | 124,0 | 42,8 | 153,2 |
| Maggio . . | 43,0 | 66,0 | 59,2 | 0 | 0 | 20,5 | 87,2 | 0 | 28,6 | 21,9 | 31,0 | 0 | 104,0 | 100,0 | 22,7 | 81,4 |
| Giugno . . | 108,0 | 0 | 0 | 22,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18,8 | 0 | 49,0 | 0 | 26,0 | 0 | 0 |
| Luglio . . | 0 | 28,0 | 74,8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23,5 | 0 | 41,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Agosto . . | 54,0 | 0 | 0 | 0 | 63,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 85,0 | 20,8 | 0 |
| Settembre | 44,0 | 91,0 | 414,0 | 54,6 | 407,2 | 0 | 229,5 | 124,0 | 0 | 39,6 | 44,0 | 30,8 | 29,0 | 134,0 | 31,1 | 144,2 |
| Ottobre . . | 377,0 | 359,0 | 502,5 | 171,0 | 476,6 | 191,4 | 487,6 | 216,0 | 225,2 | 148,5 | 90,4 | 241,1 | 155,0 | 183,0 | 155,1 | 414,7 |
| Novembre | 305,0 | 289,0 | 625,2 | 31,0 | 757,0 | 0 | 816,2 | 164,4 | 246,9 | 111,2 | 252,3 | 206,6 | 157,0 | 246,0 | 101,2 | 230,5 |
| Dicembre | 120,0 | 217,0 | 199,6 | 238,4 | 477,9 | 82,7 | 400,8 | 199,0 | 318,1 | 201,3 | 137,1 | 248,0 | 204,0 | 414,0 | 26,4 | 74,3 |
| Totale . . | 1545,0 | 1493,0 | 2703,7 | 691,8 | 3152,5 | 327,6 | 2920,2 | 795,9 | 1904,0 | 735,9 | 667,0 | 892,6 | 1262,5 | 2299,0 | 466,1 | 1403,3 |

Le cifre trascritte sono molto rilevanti ove si pensi che la quantità di acqua che cade annualmente è in media al massimo di 600 millimetri.

Per Caltanissetta si hanno dei valori molto elevati, onde si deduce che quivi è molto frequente la caduta di pioggia abbondante.

Per far vedere infine come annualmente si sono presentate queste cadute di precipitazione, si è formulato il seguente quadro, dove si hanno per ciascuna città il numero di volte in cui la precipitazione fu accompagnata dalla disposizione barometrica A₁ o A₂, e il numero totale di volte che fu registrata una precipitazione superiore a 20 millimetri.

| | Messina | | | Riposto | | | Catania | | | Siracusa | | | Mineo | | | Girgenti | | | Caltanissetta | | | Trapani | | |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | Giorni piovosi | A ₁ | A ₂ | Giorni piovosi | A ₁ | A ₂ | Giorni piovosi | A ₁ | A ₂ | Giorni piovosi | A ₁ | A ₂ | Giorni piovosi | A ₁ | A ₂ | Giorni piovosi | A ₁ | A ₂ | Giorni piovosi | A ₁ | A ₂ | Giorni piovosi | A ₁ | A ₂ |
| 1892 | 9 | 3 | 6 | 10 | 3 | 5 | 11 | 6 | 2 | 10 | 6 | 4 | 7 | 2 | 5 | 5 | 3 | 2 | 17 | 3 | 11 | 4 | 1 | 2 |
| 1893 | 10 | 6 | 3 | 9 | 3 | 3 | 8 | 8 | 0 | 4 | 2 | 2 | 11 | 4 | 5 | 3 | 1 | 2 | 21 | 6 | 13 | 1 | 0 | 0 |
| 1894 | 5 | 3 | 2 | 16 | 13 | 2 | 12 | 11 | 1 | 14 | 12 | 2 | 16 | 11 | 4 | 2 | 0 | 1 | 12 | 8 | 3 | 4 | 2 | 2 |
| 1895 | 7 | 4 | 3 | 5 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 6 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 22 | 2 | 14 | 3 | 0 | 3 |
| 1896 | 15 | 8 | 6 | 14 | 8 | 3 | 13 | 10 | 0 | 12 | 8 | 3 | 7 | 6 | 1 | 5 | 1 | 4 | 22 | 10 | 11 | 9 | 0 | 9 |
| 1897 | 6 | 3 | 2 | 8 | 6 | 0 | 6 | 6 | 0 | 7 | 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 2 |
| 1898 | 13 | 5 | 4 | 8 | 5 | 1 | 14 | 9 | 1 | 13 | 6 | 4 | 9 | 6 | 0 | 6 | 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 6 | 1 | 4 |
| 1899 | 6 | 1 | 4 | 10 | 5 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 | 4 | 1 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| 1900 | 12 | 5 | 6 | 5 | 2 | 3 | 4 | 4 | 0 | 5 | 4 | 1 | 7 | 3 | 2 | 6 | 1 | 5 | 3 | 0 | 3 | 12 | 3 | 9 |
| 1901 | 11 | 4 | 6 | 14 | 9 | 5 | 13 | 11 | 2 | 15 | 10 | 5 | 4 | 2 | 1 | 4 | 0 | 3 | 6 | 0 | 5 | 7 | 0 | 7 |
| 1902 | 9 | 5 | 4 | 10 | 7 | 3 | 16 | 15 | 1 | 16 | 16 | 0 | 8 | 5 | 3 | 8 | 5 | 3 | 9 | 4 | 5 | 13 | 6 | 7 |
| Totale | 103 | 47 | 46 | 111 | 63 | 27 | 106 | 83 | 9 | 103 | 73 | 25 | 80 | 44 | 24 | 47 | 20 | 23 | 117 | 35 | 68 | 64 | 14 | 47 |

Facciamo il rapporto fra i numeri spettanti ai simboli A_1 , A_2 ed i numeri che ci rappresentano il totale delle osservazioni.

| | | | | | |
|----------|--------------------------|--------------------------|---------------|--------------------------|--------------------------|
| Messina | $\frac{47}{103} = 0,456$ | $\frac{46}{103} = 0,446$ | Mineo | $\frac{44}{80} = 0,550$ | $\frac{24}{80} = 0,300$ |
| Riposto | $\frac{63}{111} = 0,567$ | $\frac{27}{111} = 0,243$ | Girgenti | $\frac{20}{47} = 0,425$ | $\frac{23}{47} = 0,489$ |
| Catania | $\frac{83}{106} = 0,783$ | $\frac{9}{106} = 0,085$ | Caltanissetta | $\frac{35}{117} = 0,299$ | $\frac{68}{117} = 0,581$ |
| Siracusa | $\frac{73}{103} = 0,709$ | $\frac{25}{103} = 0,242$ | Trapani | $\frac{14}{64} = 0,219$ | $\frac{47}{64} = 0,734$ |

I valori così ottenuti, che ci indicano la probabilità colla disposizione A_1 e A_2 vengono a confermare l'influenza esercitata dalle due differenti disposizioni sulle varie città, influenza che avanti è stata accennata.

Giova notare che le conclusioni relative alle città poste nel versante orientale, si trovano in ottima concordanza con le conclusioni a cui venne il chiarissimo prof. G. P. Grimaldi⁽¹⁾ studiando le precipitazioni superiori a 50 millimetri che si manifestarono a Catania dal 1881 al 1902.

Ed ora che abbiamo indicato la disposizione barometrica che con molta probabilità accompagna la caduta di pioggia abbondante, apparisce evidente come tenendo dietro ai Bollettini meteorici che giornalmente il nostro Ufficio Centrale pubblica, essa si possa in certo qual modo prevedere. E se facciamo seguire tali previsioni da osservazioni idrometriche eseguite in diversi punti del bacino del fiume o del torrente, riuscirà facile sapere se ci troviamo dinanzi ad una piena e conoscerne la sua portata. Ma molte volte la disposizione barometrica subisce sì repentini cambiamenti, da manifestarsi prima dell'arrivo del telegramma meteorico.

Allora basta ricordare che se la depressione passa al nord di una stazione di Sicilia, e si muove da est verso ovest, le successive direzioni del vento variano nel senso inverso del moto degli indici dell'orologio, da nord verso sud passando per ovest. Se la depressione passa al sud della stazione, e si muove anche da est a ovest, i venti ruotano nel senso degli indici dell'orologio da nord a sud passando per est.

Ora se noi disponiamo di un barometro e esaminiamo le successive direzioni dei venti, sarà agevole sapere in che rapporto una data contrada si trova colla disposizione generale barometrica. Poichè per mezzo della direzione del vento noi conosciamo approssimativamente l'orientamento nel quale

⁽¹⁾ Prof. G. P. Grimaldi, *Sulla inondazione di Modica del 26 settembre 1902*. Atti dell'Accademia Gioenia di Catania, 1903.

si trova il centro di depressione, per mezzo di una perpendicolare condotta alla sinistra di questa direzione; il basso, alto e costante valore barometrico ci fa sapere se il centro si avvicina, si allontana o staziona; ed il senso della rotazione delle successive direzioni del vento ci permette di sapere da qual lato si trova situata la traiettoria del centro.

Concludendo, possiamo dire come la previsione delle piene dei fiumi in Sicilia apparisce molto probabile ad ottenersi usufruendo delle osservazioni pluviometriche. Ma è necessario che si impiantino delle stazioni pluviometriche in varie località del bacino del fiume e che si conoscano i rapporti tra la piena e le piogge.

Sopra quest'ultimo argomento ci proponiamo di ritornare quanto prima.

Chimica. — *Nuova determinazione del tellurio per via elettrolitica* ⁽¹⁾. Nota di G. GALLO, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

La determinazione quantitativa del tellurio per via elettrolitica, fu tentata da pochi. Le prime notizie in proposito si hanno in alcuni lavori di Schucht ⁽²⁾ e di Schicht ⁽³⁾ nel 1880, i quali dicono che il tellurio per azione della corrente, in soluzione acida o alcalina, si depone in principio, ma dopo qualche tempo si stacca e viene a galleggiare alla superficie, mentre all'anodo si formano dei depositi metallici.

Più tardi, nel 1900, Norris, Fay, Edgerly ⁽⁴⁾ trattando della preparazione del tellurio, fanno un piccolo accenno ad un tentativo di deposizione elettrolitica del tellurio in soluzione nitrica, cloridrica, e di tellurito alcalino. Gli autori dicono che per il tellurio furono applicati gli stessi metodi che si impiegano per la determinazione elettrolitica dell'antimonio, data la spiccata analogia del tellurio con questo elemento, ma che però il deposito è sempre amorfo, fioccoso, e non suscettibile quindi di determinazione quantitativa.

Il primo e l'unico finora che propose un metodo per la determinazione elettrolitica del tellurio, fu G. Pellini in una Memoria apparsa recentemente nella Gazzetta Chimica ⁽⁵⁾.

L'autore parte dall'anidride tellurosa, TeO_2 . la discioglie in HCl concentrato, e vi aggiunge quindi 100-120 cc. di una soluzione satura a freddo di bitartrato ammonico. Elettrolizza poi in capsula di Classen a superficie

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica applicata ai materiali da costruzione della R. scuola per gli ingegneri di Roma.

(2) Jahresbericht der Chemie. Ann. 1880, pp. 174 e 1143.

(3) Id Id p. 1144.

(4) Chemical News, 82, pag. 203 (1900).

(5) Gazz. Chim. ital., ann. XXXIV, part. I, fasc. II, pag. 128 (1904).

matta, con una densità normale di corrente 0,02-0,014 amp. alla temperatura di 55-65°. In tali condizioni si richiede il tempo di un'ora pel deposito in media di gr. 0,016 di tellurio. Lava quindi il deposito con acqua bollita e raffreddata in corrente CO_2 .

Con questo metodo il Pellini ottenne buoni risultati, quando però la quantità di tellurio deposto non oltrepassi i 17 centigrammi circa, e quando s'interrompa l'elettrolisi non appena compiuta la deposizione. Però, soggiunge, sarebbe desiderabile, come si propone di studiare, che l'aderenza del deposito si potesse ottenere in condizioni più favorevoli.

Per uno studio che mi sono proposto di intraprendere sul tellurio, mi si presentò la necessità di impiegare questo mezzo di determinazione. Senza togliere per nulla il valore che spetta al metodo proposto dal Pellini, dovetti constatare però che non sempre l'operazione è di sicura riuscita; data poi la piccola quantità di tellurio, che, secondo le indicazioni del Pellini, si può deporre per restare nel campo di una determinazione quantitativa, il metodo stesso era insufficiente per il mio scopo.

È per questo quindi che io mi studiai di ricercarne un altro, il quale mi permettesse un affidamento più certo nel risultato finale, non solo, ma anche, e specialmente, la possibilità di poter determinare una quantità di tellurio maggiore.

Due erano le difficoltà che dai primi tentativi m'accorsi di dover superare: I. Il poter ottenere un deposito compatto ed aderente in modo da permetterne il lavaggio senza perdita alcuna; II. Impedire l'alterazione del deposito stesso.

È noto infatti come il tellurio di recente precipitato subisca una rapida alterazione in contatto dell'aria, alterazione che consiste essenzialmente in una ossidazione. Di questo io ho potuto convincermi, perchè spesso, raccogliendo nelle mie esperienze preliminari, il tellurio che si staccava durante l'elettrolisi o il lavaggio in un crogiuolo di Gook, la quantità totale di tellurio che si otteneva dall'aumento di peso della capsula e del crogiuolo era spesso superiore a quella calcolata.

Dopo parecchi tentativi infruttuosi, io credo di aver superato queste difficoltà operando nel seguente modo:

Il tellurio puro bidistillato nel vuoto, veniva pesato nella capsula di Classen a superficie matta. Si aggiungevano quindi 10 cc. di H_2SO_4 concentrato, e si riscaldava debolmente fino a scomparsa della colorazione rossa ed a formazione incipiente di fumi bianchi. Il tellurio, come è noto, si discioglie nell' H_2SO_4 concentrato provocando una bellissima colorazione rosso porpora, che scompare col riscaldamento, mentre si ha formazione di SO_2 e acido telluroso (H_2TeO_3) che per raffreddamento cristallizza ⁽¹⁾. Si lasciava

(1) Metzner, Moissan, *Traité de Chimie Minérale*, tom. I, 1904, pag. 500.

raffreddare, e quindi si aggiungevano alla massa bianca, con precauzione in principio, alcuni centimetri cubici di acqua bollita e raffreddata in corrente di CO_2 ; quindi ancora 100-150 cc. di una soluzione di *pirofosfato di sodio*, o di potassio, al 10 %, fatta previamente bollire, e raffreddata in corrente di CO_2 . Si riscaldava quindi lentamente, agitando la massa bianca con un bastoncino di vetro fino a soluzione completa, e, raggiunta la temperatura di 60-62°, temperatura che doveva essere mantenuta costante per tutto il tempo dell'operazione, si incominciava l'elettrolisi, impiegando come anodo un filo di platino, avvolto a spirale, con una densità normale di corrente $\text{ND}_{100} = 0,025$ amp. e con una differenza di potenziale agli elettrodi di 1,8-2 volt. L'acqua che a mano a mano evaporava, veniva con un sistema qualunque automaticamente sostituita, con acqua (bollita e raffreddata in corrente di CO_2) che si faceva arrivare lungo il filo di Pt costituente l'anodo. In tal modo si concorreva a mantenere al disopra della capsula un'atmosfera costantemente inerte.

Una buona precauzione che io osservavo, era anche quella di aggiungere di tanto in tanto un po' della soluzione di pirofosfato, in modo che invece di permettere che i bordi del deposito rimanessero scoperti, procuravo che il volume del liquido nell'interno della capsula andasse lentamente ma progressivamente aumentando, raggiungendo in tal modo l'utile scopo che lo spessore dello strato di tellurio depositato andasse progressivamente e gradatamente decrescendo verso il limite suo superiore.

La fine dell'elettrolisi, veniva riconosciuta, come fece il Pellini ⁽¹⁾, saggiando 1 o 2 cc. del liquido addizionato con qualche goccia di HCl e scaldato, con un po' di soluzione di SnCl_2 . Se anche dopo un minuto il liquido osservato per riflessione sopra un fondo bianco non presenta imbrunimento alcuno, l'elettrolisi è finita. La reazione col SnCl_2 è dovuta, come è noto, alla riduzione dell'acido telluroso, ed è così sensibile, che secondo il Fischer ⁽²⁾ permette il riconoscimento di una parte di tellurio in 600,000 parti di liquido.



ed è importante notare, che, dopo aggiunta di HCl , questa reazione non è ostacolata per niente dalla presenza del pirofosfato di Na.

Terminata l'elettrolisi, si lavava senza interrompere la corrente o con H_2O , come il solito, bollita e raffreddata in corrente di CO_2 , o meglio con soluzione di SO_2 . Si lavava ancora una volta dopo interruzione della corrente e decantazione del liquido della capsula, si ripeteva due volte il lavaggio con alcool

⁽¹⁾ Loc. cit.

⁽²⁾ Gmelin-Krant, vol. II, par. II, pag. 936.

assoluto, si disseccava la capsula per 10 minuti a 100, quindi, dopo averla conservata per almeno due ore in essiccatore in cui si praticava il vuoto, si pesava.

La seguente tabella contiene i risultati delle determinazioni eseguite.

Le prime quattro esperienze furono fatte con densità di corrente troppo forti, e infatti i risultati non sono troppo soddisfacenti, perchè una piccola parte di tellurio qualche volta si staccò verso la fine dell'elettrolisi e durante il lavaggio; i risultati sono invece migliori nelle ultime cinque determinazioni, in cui adottai una densità di corrente minore, tanto che impiegando anche circa 40 centigrammi di tellurio, l'errore varia da un massimo di grammi 0,0006 a 0.

In queste condizioni infatti, si evita sempre anche il più piccolo distacco del deposito, sia durante l'elettrolisi, che durante il lavaggio. L'alterazione del tellurio è completamente evitata.

| Numero | TELLURIO | | Differenza in gr. | Densità di corrente per 100 cmq. | Tem- peratura | Durata in ore | Aspetto del deposito |
|--------|-----------|---------|----------------------|--|------------------|---------------------|----------------------------|
| | impiegato | trovato | | | | | |
| 1 | 0.0651 | 0.0648 | 0.0003 | 0.045 amp. | 60-62 | 2 1/2 | nero-opaco |
| 2 | 0.1881 | 0.1873 | 0.0008 | 0.04 " | " | 6 | grigio-nero |
| 3 | 0.2011 | 0.2002 | 0.0009 | " " | " | 7 3/4 | " |
| 4 | 0.2088 | 0.2077 | 0.0011 | 0.05 " | " | 5 1/2 | grigio-opaco |
| 5 | 0.2154 | 0.2154 | 0.0000 | 0.025 " | " | 8 1/2 | grigio-nero |
| 6 | 0.2536 | 0.2535 | 0.0001 | " " | " | 10 | " |
| 7 | 0.3105 | 0.3100 | 0.0005 | " " | " | 13 | " |
| 8 | 0.3140 | 0.3138 | 0.0002 | " " | " | 13 1/2 | " |
| 9 | 0.4036 | 0.4030 | 0.0006 | " " | " | 17 | " |

Con questo metodo si possono deporre circa 25 mmgr. di tellurio in un' ora.

La capsula si pulisce dal deposito mediante trattamento con HNO_3 di media concentrazione.

Nei limiti delle esperienze da me eseguite, non è possibile stabilire la quantità massima di tellurio che può rimanere ben aderente; io sono arrivato a deporre in 17 ore gr. 0,4030 di tellurio, ma è prevedibile che, data la buona aderenza del deposito, aumentando convenientemente la durata dell'elettrolisi, se ne possa deporre una quantità ben più rilevante.

In qual modo agisca il pirofosfato di Na, purtroppo non è facile, per ora, rispondere, perchè non è facile spiegare razionalmente tutti i procedimenti analitici che vengono proposti nelle analisi elettrolitiche, ciò che fece dire giustamente al compianto prof. Cossa nel suo pregiato trattatino di

elettrochimica, come le opere di analisi elettrolitica si riducano finora ad essere una raccolta di ricette empiriche.

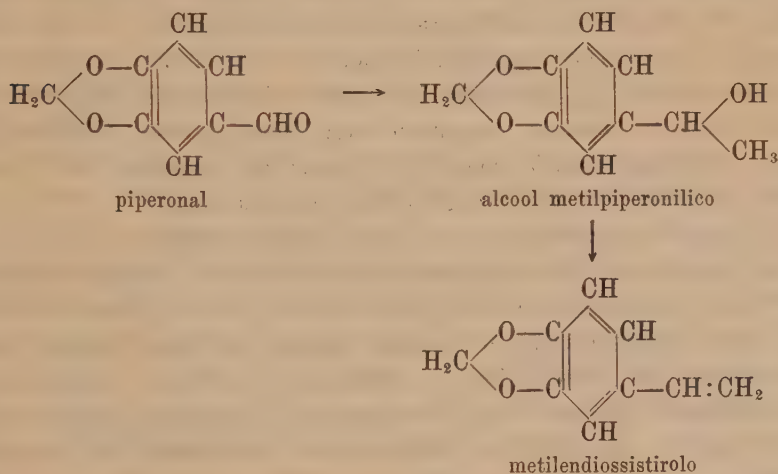
Secondo Weinland e Prause⁽¹⁾ l'acido tellurico si unisce coi fosfati, iodati, arseniati di sodio e di K per dare dei composti doppi, cristallizzati della forma per es.:

$P_2O_5 \cdot 2 TeO_3 \cdot 1,5 K_2O \cdot 17,5 H_2O$, anche $P_2O_5 \cdot 2 TeO_3 \cdot 2 Na_2O \cdot 9 H_2O$, ecc.

Non è improbabile che qualche cosa di simile avvenga fra l'acido telluroso ed il pirofosfato di Na, e che nella loro soluzione si determini la formazione di un ione complesso, o una reazione chimica locale, mediante cui il tellurio può venire separato allo stato metallico compatto.

Chimica. — *Sull'etere metilpiperonilico*⁽²⁾. Nota di EFISIO MAMELI, presentata dal Socio E. PATERNÒ⁽³⁾.

Studiando la reazione fra aldeide piperonilica e iodometilato di magnesio⁽⁴⁾, intorno alla quale si avevano notizie incomplete e non concordi⁽⁵⁾, ebbi occasione di descrivere, oltre il prodotto immediato di essa reazione, che è l'alcool metilpiperonilico, l'idrocarburo non saturo — il piperoniletilene o metilendiossistirolo — che da esso facilmente deriva per disidratazione.



nonchè un polimero e altri derivati dell'idrocarburo stesso. Ottenni anche una

(1) *Rerichte chem. Gesell.* 23-1015-1690 e *Zeits. f. anorg. chr.* 28-45-1901.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Cagliari.

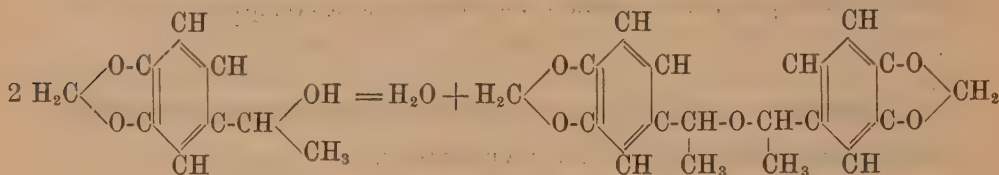
(3) Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

(4) *Gazz. chim. ital.*, 34, I.

(5) *Bull. Soc. chim.*, 25, 275; *Annal. de Phys. et de Chim.*, 24, 477. Maggio 1904.

sostanza p. f. 111°, di cui diedi il metodo di preparazione e i risultati analitici. Il punto di fusione di questa sostanza coincide con quello trovato da Béhal ⁽¹⁾, per un corpo, a cui egli attribuì la formula di etere-ossido, e di cui non diede nè subito, nè in seguito, alcun dettaglio di preparazione o di proprietà.

Completarò ora lo studio di detta sostanza ed essendo riuscito a dimostrarne il processo di formazione, darò un nuovo e migliore procedimento per prepararla. Le proprietà e il comportamento chimico di essa permettono di stabilire che è veramente l'etere dell'alcool metilpiperonilico:



Difatti ho osservato che si ottiene per lenta e spontanea eterificazione di tale alcool in presenza di sostanze inorganiche, fatto analogo a quello già riscontrato dal prof. Fileti ⁽²⁾, per l'etere cuminico, che egli ottenne trattando con bisolfito sodico la porzione distillata a vapor d'acqua del prodotto della reazione tra aldeide cuminica e potassa alcoolica. Egli allora spiegò il fatto, dicendo che la trasformazione dell'alcool cuminico nell'etere corrispondente avveniva per la presenza di quantità anche piccolissime di sostanze minerali estranee ⁽³⁾. Il prof. Oddo, in seguito ⁽⁴⁾, studiando sistematicamente l'azione di diverse sostanze inorganiche sugli alcoli primari delle serie alifatica e aromatica, mostrò come varia l'azione con la natura delle diverse sostanze inorganiche e quella degli alcoli messi a reagire.

Io ho potuto constatare che l'alcool metilpiperonilico si trasforma ora nell'idrocarburo non saturo corrispondente, ora nell'etere. Fornisce idrocarburo per l'azione di pochissimi sali di metalli pesanti a temperatura ordinaria o della maggior parte dei sali dei metalli pesanti, oltre quelli alcalini e alcalino-terrosi a 100°, e per azione del calore, con o senza la presenza di sostanze estranee. Fornisce l'etere a temperatura ordinaria, se è ancora impuro per le tracce di sali alcalini e alcalino-terrosi, che restano nel processo di estrazione.

È interessante osservare che la formazione dell'etere metilpiperonilico in queste condizioni, ci presenta il primo esempio di eterificazione di un

(1) Bull. Soc. chim., 25, 275.

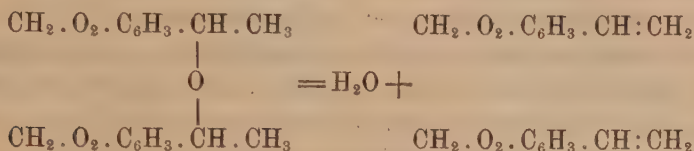
(2) Gazz. chim. ital., 14, 496.

(3) Loc. cit., 497.

(4) Gazz. chim. ital., 31, I, 285

alcool secondario per mezzo di sostanze inorganiche e di preparazione indiretta di un etere aromatico per mezzo della reazione di Grignard (1).

Che il corpo ottenuto sia veramente un etere risulta dal fatto che mentre dà reazione negativa con i reagenti capaci di combinarsi con l'ossigeno ossidrilico o carbonilico, si scinde nettamente, per l'azione del calore, in piperoniletilene e acqua:



Del meccanismo di questo processo di decomposizione dell'etere parlerò più avanti.

Parte sperimentale.

Preparazione dell'etere. — Nella Nota precedente (2), ho descritto come si ottiene l'etere metilpiperonilico dal trattamento con bisolfito sodico della soluzione eterea primitiva, proveniente dalla reazione fra piperonal e iodometilato di magnesio. Aggiungerò ora che non si ricava affatto etere se il trattamento con bisolfito sodico si fa immediatamente; invece lasciando la soluzione eterea abbandonata a sè, il rendimento è maggiore o minore a seconda del tempo più o meno lungo che si lascia trascorrere; esso però non è mai abbondante.

A questo primo metodo di preparazione, ne aggiungo ora un altro migliore, fondato anch'esso sulla eterificazione provocata nell'alcool metilpiperonilico da sali inorganici. Abbandonando a sè per lungo tempo, alla temperatura dell'ambiente, la soluzione eterea concentrata dell'alcool metilpiperonilico, senza purificarla, cioè come fu ottenuta dalla reazione fondamentale già descritta, nel liquido si forma a poco a poco una massa cristallina giallastra, in massima parte costituita da etere metilpiperonilico. Separando questo alla pompa e abbandonando a sè l'olio filtrato, questo si eterifica ancora e così indefinitamente. Talvolta la cristallizzazione della massa può provocarsi istantaneamente, gettando dei pezzetti di un sale, come cloruro di

(1) Un secondo esempio, non bene accertato, sarebbe quello recentemente indicato da Malmgren (Ber. deut. chem. Gesell., 36, 3635), che, dalle acque madri del metildicanforilcarbinol, ottenne un prodotto cristallino, cui attribuì la formula di un etere:

$$(\text{C}_{10}\text{H}_{15}\text{O})_2 \cdot \text{C}(\text{CH}_3) \cdot \text{O} \cdot \text{C}(\text{CH}_3) \cdot (\text{C}_{10}\text{H}_{15}\text{O})_2.$$

(2) Loc. cit.

calcio, in una soluzione eterea concentrata dell'alcool, non ancora purificata e rimasta abbandonata a sè per parecchi giorni.

L'etere così ottenuto si purifica per ripetute cristallizzazioni dall'alcool e dalla benzina.

Proprietà. — Senza ripetere i dati analitici e la determinazione del peso molecolare, che ho già pubblicato ⁽¹⁾ e che ho confermato con nuove analisi, dirò delle proprietà dell'etere metilpiperonilico in generale.

È un corpo bianco, inodoro, che fonde esattamente a 111°, ed è molto solubile in alcool, benzina e cloroformio, specialmente a caldo, alquanto solubile in etere solforico caldo, poco in acido acetico glaciale, pochissimo in acqua. La ligroina e l'etere di petrolio non lo precipitano dalle soluzioni benzeniche, a differenza del metilendiossistirolo. Cristallizza in bellissimi prismi rettangolari, lucenti, riuniti a gruppi, lunghi talvolta anche due centimetri e larghi cinque millimetri.

Comportamento chimico. — È insolubile negli idrati, nei carbonati e nei bisolfiti alcalini. Non decolora la soluzione cloroformica di bromo. Non si combina con la fenilidrazina, nè con l'idrossilamina, nè col cloruro di benzoile. Non riduce la soluzione di nitrato d'argento ammoniacale, riduce pochissimo il liquore di Fehling.

Con acido solforico, a freddo, dà una vivace colorazione rossa e dopo qualche tempo si separano dei fiocchi violetti. A caldo, lo stesso acido lo decompone, trasformandolo in una sostanza nera, amorfa, solubile negli idrati e nei carbonati alcalini, ma che non si lascia purificare da nessun solvente.

Con acido nitrico concentrato, reagisce facilmente, sia alla temperatura ordinaria, sia a 0° e si ottengono così vari nitroderivati facilmente cristallizzabili, dei quali ho potuto finora isolarne due: uno con p. f. = 100° e l'altro con p. f. = 192°. Le analisi fatte mi hanno dimostrato che così, come si ottengono direttamente, son costituiti da miscele di vari nitroderivati, come avviene ordinariamente nella nitratura del piperonal e dei suoi derivati ⁽²⁾. Questa reazione, date anche le incerte conoscenze sulla nitratura degli eteri aromatici a radicali eguali ⁽³⁾, richiede per stabilire risultati sicuri, un maggior studio e su di essa, come sui nitroderivati del piperonal in generale; mi riservo perciò di continuare le ricerche.

Tentativi eseguiti allo scopo di decomporre l'etere in questione con ossicloruro di fosforo e con acido bromidrico in tubi chiusi a 110°, non mi hanno fornito prodotti cristallizzabili.

Processo di decomposizione per mezzo di calore. — Era interessante studiare il processo di decomposizione dell'etere metilpiperonilico per mezzo del calore, allo scopo di fissarne la sua costituzione.

⁽¹⁾ Loc. cit.

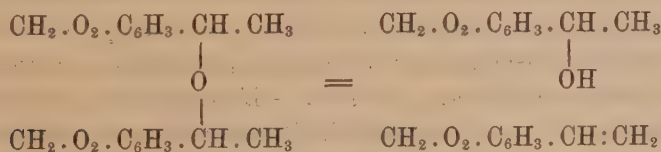
⁽²⁾ Ber. deut. chem. Gesell. 24, 624.

⁽³⁾ Gazz. chim. ital. 18, 241.

È noto che gli eteri degli alcoli primari in generale, per azione del calore, si decompongono in aldeide e idrocarburo saturo. Oltre questo processo di decomposizione, la letteratura ci offre esempi molto più rari di eteri, che si scindono in alcoli e idrocarburi non saturi. Così, l'etere del metilisopropilcarbinol a 200° si decompone in metilisopropilcarbinol e amilene ordinario ⁽¹⁾, gli eteri metil-, etil- e isobutilfenilici, gli eteri etilici del timolo e del β naftolo a temperature variabili fra 310° e 400° si scindono nel fenolo corrispondente e nell'idrocarburo non saturo ⁽²⁾, e il tetrametiletere del triclоро-pentaossidiidrobenzolo col riscaldamento dà alcool metilico ⁽³⁾.

L'etere metilpiperonilico, mentre, a pressione ridotta (20 mm. di Hg.), distilla per la maggior parte inalterato, a pressione ordinaria dà una decomposizione profonda. Riscaldando cautamente con bagno di lega metallica, si riscontra una buona porzione dell'etere inalterato, ma si nota subito l'odore speciale dell'idrocarburo non saturo, di cui accertai indirettamente la presenza per mezzo del suo polimero, che ho descritto nella Nota precedente. Riscaldando l'etere a ricadere con fiamma diretta, anche per soli cinque minuti, si decompone completamente. Appena comincia a ricadere, si nota il crepitio particolare delle gocce di acqua e nel palloncino rimane poi un olio giallo, denso, torbido, che presenta molto marcatamente l'odore del metilendioossistirolo e ne ha i caratteri. Infatti decolora la soluzione cloroformica di bromo, è insolubile in acqua, poco solubile in alcool, ma si scioglie facilmente nella benzina e nel cloroformio. La presenza dell'idrocarburo non saturo, oltrechè per questi caratteri, venne poi completamente dimostrata anche qui con il suo polimero. Infatti, se la soluzione benzenica dell'olio così ottenuto si tratta con ligroina o con etere di petrolio, precipita una polvere bianca, tenuissima, che presenta gli stessi caratteri di solubilità e lo stesso punto di fusione del polimero del metilendioossistirolo. Ho cercato di rintracciare fra i prodotti di decomposizione l'acetopiperone, sia direttamente, sia per mezzo del suo idrazone, ma non mi fu mai dato di constatarne la presenza.

La decomposizione dell'etere metilpiperonilico, per effetto del calore dà quindi, nel suo complesso, acqua e metilendioossistirolo. Essa si spiega, ammettendo che, in una prima fase, l'etere si decomponga in metilendioossistirolo e alcool metilpiperonilico:

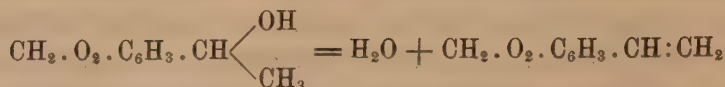


(1) Wurtz, Comp. Rend., 47, 479.

(2) Bamberger, Ber. deut. chem. Gesell., 19, 1819.

(3) Zincke e Schaum, Ber. deut. chem. Gesell., 27, 552.

e questo in una seconda fase, dia una molecola di acqua e un'altra molecola di metilendioossistirolo:



Questo processo di decomposizione trova quindi riscontro nella seconda serie d'esempi da me citati, quantunque siano più rari. Esso ne differisce soltanto per il fatto che l'alcool, che dovrebbe formarsi in prima fase, è instabile e, a quella temperatura, si scinde anch'esso nel senso già indicato. Resta così dimostrata la costituzione dell'etere metilpiperonilico.

Azione

delle sostanze inorganiche sull'alcool metilpiperonilico.

Avendo constatato, come già dissi, che l'eterificazione dell'alcool metilpiperonilico avveniva per effetto della presenza di sostanze inorganiche, volli stabilire il comportamento di tale alcool di fronte a molte di tali sostanze e constatai che esse provocano la trasformazione dell'alcool ora nell'idrocarburo non saturo ed ora nell'etere, a seconda della loro natura e della temperatura alla quale agiscono.

Trasformazione dell'alcool nell'idrocarburo. — Questo è il caso più generale.

Il cloruro ferrico, il cloruro stannoso e l'acido solforico, anche in tracce, trasformano repentinamente a temperatura ordinaria, l'alcool metilpiperonilico nell'idrocarburo non saturo corrispondente, talvolta con sviluppo di calore. La maggior parte degli altri sali dei metalli pesanti, oltre quelli di magnesio, sono atti a determinare la stessa trasformazione nello spazio di pochi minuti a 100°, con rendimento abbondante, mentre, nelle stesse condizioni di temperatura, i sali dei metalli alcalini e alcalino-terrosi danno uno scarso rendimento in idrocarburo. A temperature superiori, l'alcool si trasforma in idrocarburo, in presenza di qualunque sostanza; del resto ho già descritto, nella Nota precedente, che, anche per semplice riscaldamento, esso perde una molecola di acqua, e si trasforma nell'idrocarburo non saturo. In tutte queste esperienze, la presenza dell'idrocarburo non saturo fu sempre dimostrata mediante la trasformazione di esso nel polimero già descritto.

Trasformazione dell'alcool nell'etere. — L'eterificazione invece dell'alcool metilpiperonilico si ha per l'azione lenta dei sali alcalini o alcalino-terrosi a temperatura ordinaria, anche in presenza di etere solforico. Infatti essa avviene, come già dissi nel metodo di preparazione, abbandonando a sè, per lungo tempo, alla temperatura dell'ambiente, la soluzione eterea concentrata del-

l'alcool metilpiperonilico, senza purificarla, cioè come fu ottenuta dalla reazione fondamentale già descritta. In queste condizioni, le tracce di sali inorganici contenuti nella soluzione eterea (ioduri, acetati e bisolfiti di sodio e di magnesio), eterificano l'alcool, che, a poco a poco, si trasforma in una massa cristallina giallastra, in massima parte costituita da etere metilpiperonilico.

Chimica. — *Sugli equilibri fra clorocanfora e bromocanfora* ⁽¹⁾. Nota di M. PADOA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN ⁽²⁾.

Nel corso di esperienze sulla velocità di cristallizzazione di miscele isomorfe ⁽³⁾ ebbi occasione di verificare che la K. G. della bromocanfora viene aumentata coll'aggiunta di clorocanfora, e ciò in seguito alla formazione di soluzioni solide. Volli verificare se a tale comportamento eccezionale corrispondesse una speciale forma della curva di congelamento fra le due sostanze, ad esempio una curva che presentasse un massimo. La cosa avrebbe presentato interesse poichè è risaputo che un tal caso (di miscele isomorfe che fondono più alto di ambedue i componenti) non è ancora stato realizzato, per quanto sia preveduto dalla teoria; soltanto pel sistema speciale formato da due antipodi ottici, Roozeboom a Adriani ottennero una curva di tal genere.

L'esperienza mi condusse però a risultati più complessi; il sistema realizzato, pure preveduto dalla teoria, non si era ancora verificato sperimentalmente.

Prima di riportare i dati ottenuti descrivo quelle proprietà caratteristiche delle due sostanze in parola, che interessano nel nostro caso.

I due derivati alogenati di cui si tratta sono la α -bromocanfora e la α -clorocanfora ⁽⁴⁾; esse cristallizzano ambedue monocline, sono, come si vede dai dati che qui riporto ⁽⁵⁾, quasi perfettamente isomorfe.

| | | β | 110:110 | 011:011 |
|------------------------|-----------------|---------|---------|---------|
| Clorocanfora monoclina | 1.2079:1:0.9707 | 93.15° | 79.20 | 88.12 |
| Bromocanfora " | 1.2096:1:0.9725 | 93.49 | 79.48 | 100.12 |

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

(3) Questi Rendiconti, 1904, I, 329.

(4) Queste denominazioni si riferiscono alla nomenclatura adottata per simili composti dal Beilstein (Ergänzungsband III, pag. 355 seg.).

(5) Graham-Otto, 3^a edizione, vol. III, pag. 255.

È però prevedibile la formazione di soluzioni solide in tutti i rapporti.

La bromocanfora impiegata era di quella che si trova in commercio, preparata per azione del bromo sulla canfora; la purificai cristallizzandola dall'alcool: fonde a 75° senza subire preventivamente alcuna trasformazione.

La clorocanfora fonde, secondo i dati degli autori, a 92°-95°; ma nel corso di precedenti esperienze⁽¹⁾ potei vedere che prima di fondere essa si trasforma in una massa d'apparenza gelatinosa. Vedremo in seguito di che cosa si tratta; in ogni caso è certo che soltanto al disotto di 75° è stabile la forma monoclina della clorocanfora.

Preparai tale sostanza, secondo le indicazioni di Cazeneuve⁽²⁾, facendo passare cloro secco attraverso una soluzione alcoolica di canfora.

Prima curva di congelamento. — Ed ora ecco i dati relativi al congelamento delle varie miscele binarie che solidificando danno direttamente i cristalli monoclini:

Bromocanfora su 100 p. di miscela Punto di congelamento

| | |
|--------|-----------|
| 100.00 | 75.12 |
| 99.35 | 75.18 |
| 98.79 | 75.19 |
| 98.40 | 75.17 |
| 96.94 | 75.16 |
| 94.82 | 75.13 |
| 82.90 | 74.97 |
| 71.05 | 75.03 |
| 63.30 | 75.17 |
| 57.17 | 75.30 |
| 52.06 | 75.45 |
| 47.90 | 75.57 |
| 43.38 | 75.65 |
| 39.76 | 75.37 (?) |

L'ultima misura è incerta perchè questa miscela prima di cristallizzare come la precedente, manifesta la tendenza a dare l'altra modificazione di

⁽¹⁾ Bruni e Padoa, questi Rendiconti, 1903, II, 119.

⁽²⁾ Bulletin de Chimie pure et appliquée, 38, 9.

cui parlo in seguito; perciò tale temperatura sarebbe piuttosto un punto di trasformazione.

Portando come ordinate le temperature e come ascisse le concentrazioni in peso (ho creduto inutile in questo caso calcolare le concentrazioni in mo-

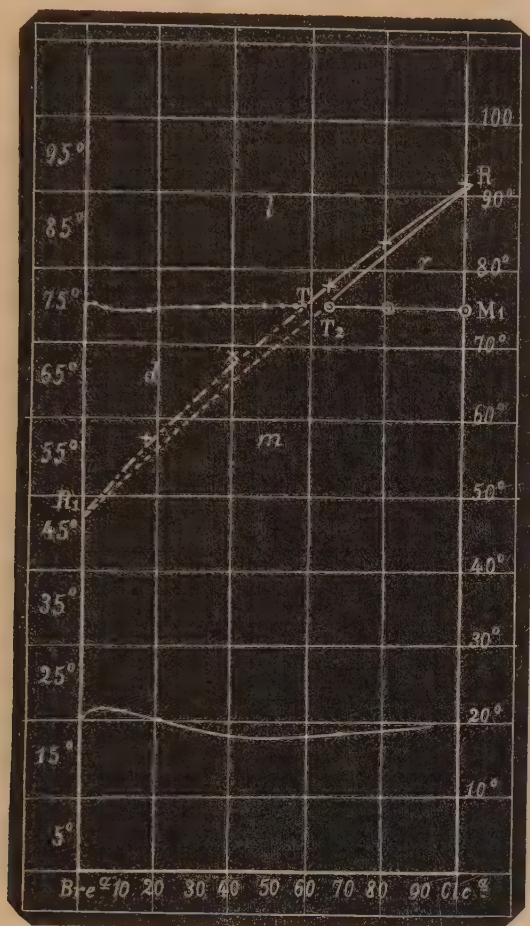


FIG. 1.

lecole) si ha la curva MT della fig. 1; l'andamento di questa curva di congelamento si può veder meglio nella stessa fig. 1 in basso, dove la curva è rappresentata in iscala diversa.

Il comportamento della clorocanfora con la bromocanfora è reso più chiaro dalla figura 2 nella quale ho rappresentato schematicamente l'andamento delle varie curve.

Come si vede, le miscele che contengono da 0 a 10 % di clorocanfora hanno punti di congelamento lievemente più elevati della bromocanfora

pura; aumentando ulteriormente le quantità della clorocanfora le temperature di congelamento diminuiscono fino alla concentrazione di circa 10 % di clorocanfora, dopo di che di nuovo aumentano regolarmente fino al punto di massimo C. Un tale comportamento, per quanto strano, non è però con-

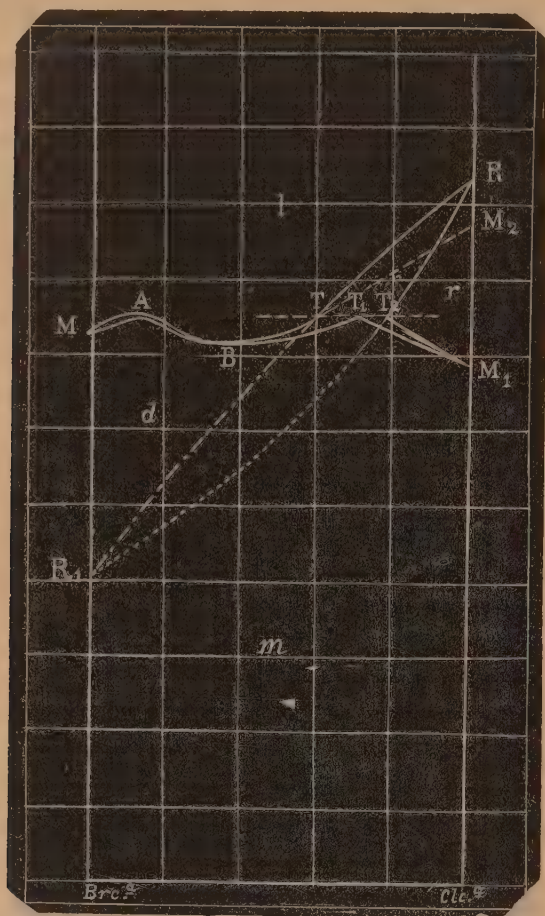


FIG. 2.

traddetto dalla teoria; e benchè gli innalzamenti delle temperature di congelamento delle miscele che contengono meno del 10 % di clorocanfora, rispetto al punto di congelamento della bromocanfora, siano assai piccoli, non si può tuttavia dubitare della loro esistenza, poichè li verificai più volte.

Esperienze quantitative. — Data la novità del caso, non era senza interesse la conoscenza della curva coniugata a quella di congelamento sopra descritta; importava cioè determinare la composizione delle soluzioni solide

che si separano dalle miscele liquide. Perciò eseguii due separazioni di cristalli misti con l'apparecchio di Van Bijlert; determinai nel seguente modo la composizione dei cristalli separati.

Col metodo di Carius, partendo da gr. 0.3 - 0.4 di cristalli, ottenevo una miscela di cloruro e bromuro d'argento; dal peso di questa si poteva già dedurre il rapporto fra cloro e bromo, e però la composizione della miscela: ma con questo metodo gli errori d'analisi influiscono eccessivamente sui risultati. La precisione raggiunta è assai maggiore quando si riduca una porzione della miscela di cloruro e bromuro d'argento, ad argento metallico; feci tale riduzione introducendo la miscela in un tubetto pesato di vetro infusibile, poi riscaldando e facendovi passare una corrente di idrogeno elettrolitico. Dal peso dell'argento ottenuto si calcola il rapporto fra cloro e bromo e quindi quello fra clorocanfora e bromocanfora.

Un errore di 0.10 % nell'argento porta una differenza di circa 0.60 % nella concentrazione della bromocanfora.

Ecco i risultati ottenuti:

| Miscela iniziale | | Cristalli separati gr. | Miscela AgCl.+AgBr. analizzata gr. | Ag. ottenuto | Composizione dei cristalli separati (Bromocanfora%) |
|------------------|-----------------------------|------------------------------|---|--------------|--|
| Bromocanfora% | gr. di miscela impiegati | | | | |
| 83.61 | 13.5 | 1.2 | 0.1870 | 0.1136 | 80.58 |
| 60.00 | 9.0 | 0.85 | 0.2600 | 0.1683 | } 58.00 |
| | | | 0.2630 | 0.1700 | |

È dunque evidente che la curva coniugata MT si mantiene vicinissima alla curva di congelamento.

Inoltre l'andamento di tale curva coniugata si può anche prevedere teoricamente; applicando alla curva di congelamento MT il principio di Gibbs ⁽¹⁾ che in ogni sistema in equilibrio a pressione determinata è stabile quella fase che ha il minor potenziale termodinamico, non riesce difficile vedere che la curva coniugata deve risultare tangente alla curva di congelamento tanto in A quanto in B (fig. 2). In altri termini in quei punti si debbono separare dal liquido miscele cristalline della stessa composizione delle rispettive miscele liquide.

Fenomeni di trasformazione. — Prima di procedere oltre, occorre rendersi conto della vera natura della trasformazione che subisce la clorocanfora prima di fondere. Intanto cercai di determinare con esattezza il punto di trasformazione; si mostrarono inadatti a quest'uopo il metodo dilatometrico e il metodo termico. Assai bene si presta invece quello basato sulla velocità di trasformazione. Consiste nell'osservare in uno dei soliti tubetti che servono per

(¹) Come ha fatto già Roozeboom in casi simili (Zeitschr. für physik. Ch. XXX, 385).

misure di velocità di cristallizzazione, immerso in un bagno, con quale velocità proceda la trasformazione dell'una modificazione nell'altra. Facendo l'esperienza a varie temperature in vicinanza del punto di trasformazione, si arriva a trovare una temperatura alla quale le due modificazioni rimangono stazionarie l'una di fronte all'altra, poichè la velocità di trasformazione (U. G.) è diventata nulla. Questo è evidentemente il punto di trasformazione.

Per la velocità di trasformazione ottenni i seguenti valori:

| Temperatura del bagno | U. G. mm. per 1' | Osservazioni |
|-----------------------|---------------------|------------------------|
| 75.0° | 0.0 | — |
| 74.0 | 12 | Nessun germe spontaneo |
| 73.0 | 34 | " " " |
| 71.5 | 82 | " " " |
| 67.0 | 600 | " " " |
| 63.5 | 1250 | " " " |
| 60.0 | 2100 | " " " |
| 50.0 | Non meno di 2400 | Germi |

Queste misure si riferiscono alla velocità di trasformazione della forma stabile ad alta temperatura nella forma monoclinica; non è possibile in questo caso eseguire misure per la trasformazione inversa.

Ciò posto occorre sapere di che natura fosse la modificazione stabile sopra 75°; per vedere se la sostanza era cristallina ne cercai il punto di congelamento tra 90° e 95°, ma senza alcun risultato; ne conclusi che, o la sostanza non era cristallina, oppure possedeva un calore di fusione tanto piccolo da rendere impossibile qualsiasi misura termometrica. Per decidere la questione mi rivolsi al chiarissimo prof. E. Artini, il quale da un accurato esame microscopico dedusse che al disotto di 91° — 91.5 la clorocanfora cristallizza in begli scheletri monometrici; non è possibile ottenere qualsiasi soprafusione, ciò che, insieme all'aspetto jalino che assume la sostanza a pochi gradi sotto il punto di fusione, mi aveva fatto supporre trattarsi di una modificazione amorfa o gelatinosa. Io stesso ho poi constatato a temperature poco inferiori al punto di fusione, la formazione di questa modificazione cristallina, dotata di non grande velocità di cristallizzazione e di notevole numero di germi o centri spontanei di cristallizzazione. La trasformazione che ha luogo a 75° consiste nel passaggio da questa forma monometrica a quella monoclinica, o viceversa; si può *sopraraffreddare* al disotto di 75° (anche fino a 50°) la clorocanfora monometrica, ciò che mi permise di fare le già descritte misure di U. G.

La clorocanfora è dunque dimorfa enantiotropa.

Ciò posto determinai le temperature di trasformazione di alcune miscele con bromocanfora. Così una miscela che contiene il 20 % di bromocanfora si trasforma a 75°.3; una miscela al 35 % si trasforma a 75°.6. Miscele che contengono più del 40 % di bromocanfora fondono senza trasformarsi.

Nelle esperienze finora eseguite si hanno esempi di sostanze che abbassano il punto di trasformazione di altre con le quali danno soluzioni solide; qui si ha al contrario un piccolo innalzamento del punto di trasformazione. Questo caso è perfettamente analogo a quello degli innalzamenti termometrici dei punti di congelamento nei casi di formazione di soluzioni solide con coefficienti di ripartizione maggiori dell'unità.

Seconda curva di congelamento. — Per stabilire come si comporta la bromocanfora con la clorocanfora monometrica, e non potendo eseguire per ragioni già dette esperienze crioscopiche, mi limitai ad osservare i punti di fusione di varie miscele col metodo comune.

| Miscela Bromocanfora % | Punto di fusione | Osservazioni |
|---------------------------|------------------|-------------------------------------|
| 0.0 | 92° | Le varie miscele fondono nettamente |
| 20 | 84 | |
| 40 | 78 | |
| 60 | 69 | Punto di fusione labile |
| 83 | 58 | " " " |

Si vede che questa seconda curva di congelamento va ad incontrare la prima descritta; ma, ciò che più interessa, *questa curva può essere realizzata completamente*. Difatti le miscele che contengono più del 40 % di bromocanfora sono stabili soltanto nella forma monoclinica; ma possono essere anche ottenute nella forma monometrica allo stato labile sopraraffreddandole allo stato liquido avendo cura di evitare la presenza di germi monoclini. Si possono anche osservare i punti di fusione labili di tutte queste miscele, anche di quelle che contengono pochissima clorocanfora. Inoltre il prof. Artini è riuscito sopraraffreddando la bromocanfora pura, a ottenerla qualche volta nella forma monometrica corrispondente alla forma superiore della clorocanfora; non potè però determinare con sicurezza il punto di fusione labile. Tale punto tuttavia è probabilmente a 45° — 46°.

Io pure potei osservare lo stesso fenomeno; la bromocanfora è dunque dimorfa monotropa e la sua forma labile monometrica dà una serie continua di cristalli misti con la forma monometrica della clorocanfora. La curva coniugata a quella di congelamento RTR₁, si deve ritenere le si mantenga sempre vicinissima, poichè tutte le miscele monometriche fondono assai nettamente, ciò che sta a dimostrare che nel passaggio dello stato solido a quello liquido si hanno delle variazioni minime nelle concentrazioni.

Misure di K. G. e U. G. — Le seguenti misure si riferiscono alla velocità di cristallizzazione di alcune miscele monoclina e alla velocità di trasformazione di miscele monometriche in monocline; analoghe misure ho fatto pei componenti puri.

| Miscela Bromocanfora % | Sopraraffredda- mento | | Osservazioni |
|---------------------------|--------------------------|------------|---------------|
| 100 | 23° | K. G. 1900 | Germi |
| 96.8 | 23 | " 2100 | " |
| 83 | 21 | U. G. 2140 | Nessun germe |
| " | 23 | " 2700 | Qualche germe |
| " | 21.5 | " 2750 | Germi |

| Miscela Bromocanfora % | Sopraraffreddamento | U. G. | Osservazioni |
|---------------------------|---------------------|------------|--------------|
| 35 | 17° | 2400 circa | Germi |
| — | 23 | 3000 " | " |
| 20 | 23 | 2400 " | " |
| Clorocanfora pura | 25 | 2400 " | " |

Sebbene non si possano determinare con sicurezza i massimi di K. G. e U. G., si può ritenere accertato che le varie miscele hanno rispettivamente una K. G. e una U. G. superiori a quelle dei componenti puri.

Riassumendo, l'esperienza dimostra che clorocanfora e bromocanfora sono *completamente isodimorfe*, cioè danno due serie distinte di cristalli misti in tutti i rapporti, gli uni monoclina, gli altri monometrici. Esiste un punto triplo ($TT_1 T_2$) a 75.6 nel quale coesistono il liquido, cristalli monoclina e cristalli monometrici, i quali tutti contengono intorno a 40 % di bromocanfora, poichè dai dati ottenuti risulta che sono assai vicini i punti T, T_1, T_2 . In T convergono le curve di congelamento MT, M_2T e RT . La M_2T è una curva labile che non ho potuto osservare; essa sarebbe costituita dai punti di fusione delle miscele enantiotrope, le quali come tali dovrebbero avere i punti di fusione più elevati dei punti di trasformazione situati sulla $M_1 T_2$; nel punto T_2 si tagliano la curva coniugata RR_1 e la curva di trasformazione $M_1 T_2$. Nel campo l si hanno miscele liquide, in r cristalli misti monometrici, in m , cioè al di sotto della linea MTM_1 , tutte le miscele sono allo stato di soluzioni solide monocline; inoltre al disotto di $R_1 T_2 M_1$ tutte le miscele possono esistere allo stato labile in forma monometrica. Il sistema presenta ancora questa particolarità: che tutte le miscele sono dimorfe; nel punto multiplo si ha il passaggio da miscele dimorfe a monotrope a miscele dimorfe enantiotrope.

Dal quadro precedente risulta che il sistema costituito da clorocanfora e bromocanfora è uno di quelli previsti dal Roozeboom ⁽¹⁾ e finora non verificati sperimentalmente: soltanto che il Roozeboom ha limitato le sue considerazioni ai tratti stabili delle curve di congelamento e coniugate, mentre io ho potuto osservare completamente la curva RR_1 . Questo fatto costituisce a mio parere una ragione per ritenere che nei casi di isodimorfismo si debbano assumere curve di congelamento e curve coniugate *complete*, e cioè che per le curve stesse non si debbano considerare soltanto i tratti stabili AP e BP (vedi fig. 3) che vanno dai punti di fusione al punto criodratrico, ma anche

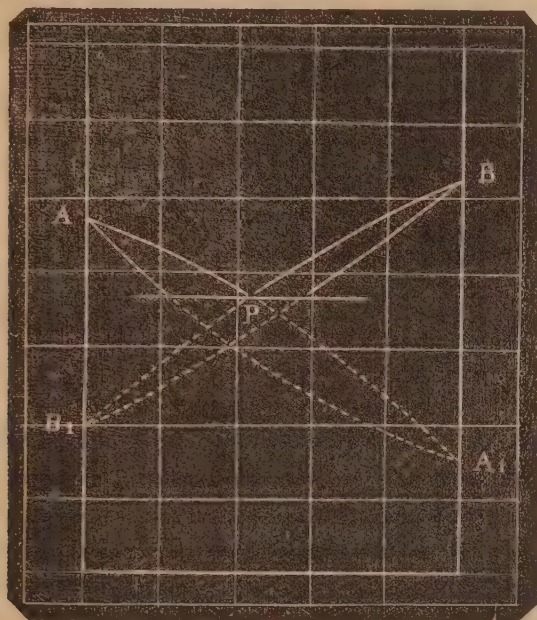


FIG. 3.

quei tra'ti labili, che probabilmente spesso si potranno realizzare, e che vanno da quel punto ai punti di fusione A_1 e B_1 delle corrispondenti modificazioni polimorfe. Tali punti di fusione saranno sempre labili, mentre quelle varie modificazioni potranno avere o no un campo di stabilità a seconda che si tratti di dimorfismo monotropo o enantiotropo. In altri termini si dovrebbe ritenere che nei casi di isodimorfismo, alla forma propria di ciascun componente corrisponda una forma (labile o no) assai simile dell'altro, colla quale è possibile la miscibilità completa allo stato solido. Perciò ho disegnato come curve continue

⁽¹⁾ *Umwandlungspunkte bei Mischkrystallen*, Zeitschr. für physik. Ch. XXX, 426, fig. 14.

le AA_1 , BB_1 ; le rispettive curve coniugate avranno con quelle comuni gli estremi.

Il dott. Bruni, che è della stessa opinione sull'argomento, esporrà tra breve in proposito considerazioni teoriche.

In una prossima Nota dirò di un altro caso che viene a confermare ciò che ora ho esposto.

Mineralogia. — *Contributo alla mineralogia della Sardegna. I. Atacanite, valentinite, leadhillite, caledonite, linarite ed altri minerali dell'Argentiera della Nurra (Portotorres).* Nota di ALBERTO PELLOUX, presentata dal Socio G. STRÜVER.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche sulla composizione dell'aria negli alveoli polmonari alla pressione normale e nell'aria rarefatta.* Nota del dott. A. AGGAZZOTTI ⁽¹⁾, presentata dal Socio A. MOSO ⁽²⁾.

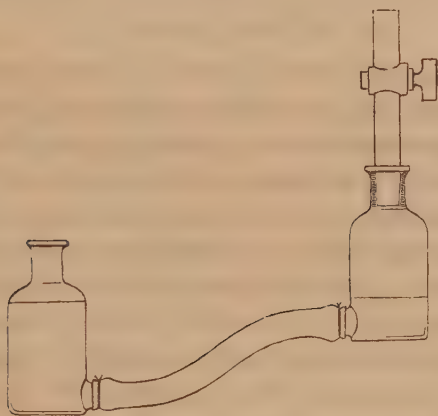
Per conoscere quali sono i mutamenti che succedono nella composizione chimica dell'aria espirata per effetto della diminuita pressione, invece di analizzare tutta l'aria che esce dai polmoni, pensai per consiglio del prof. A. Mosso di esaminare solo l'aria di riserva degli alveoli polmonari a differenti pressioni barometriche. Respirando tranquillamente, a un certo punto facevo un'espirazione profonda contraendo con forza i muscoli espiratori in modo da cacciar fuori una certa quantità dell'aria di riserva e l'ultima parte di quest'aria, raccolta, serviva all'analisi.

Con un contatore ad acqua, ho più volte valutato su me stesso, la quantità d'aria emessa a questo modo con una espirazione profonda, trovandola in media di litri 2: e ho veduto che la quantità d'aria che si può ancora emettere dopo questa espirazione profonda, contraendo fino al massimo i muscoli espiratori, è di circa mezzo litro: però bisogna osservare che nelle nostre esperienze non studiamo le alterazioni che si manifestano in tutti questi 500 c.³ d'aria; ma soltanto in 160-190 c.³; quest'ultima porzione dell'aria di riserva, viene raccolta per mezzo di due boccie a doppia apertura, della capacità di circa 250 c.³ (v. fig.) riunite fra loro con un tubo di gomma

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia nella Università di Torino.

(²) Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

di grosso calibro. L'una di esse è sormontata da un tubo d'ottone, pure di grosso calibro, munito di un rubinetto a chiusura perfetta. Le boccie contengono acqua satura di cloruro sodico. Per fare l'esperienza, si abbassa la boccia col rubinetto e, tenendo questo aperto, si fa affiorare l'acqua salata all'imboccatura superiore del tubo d'ottone, poi si chiude il rubinetto e si mette la boccia su di un piccolo sostegno in modo che rimanga più alta del-



l'altra. Stando in piedi, la persona che fa l'esperimento eseguisce l'espiazione profonda, emettendo l'aria espirata nell'ambiente; alla fine di questa si applicano rapidamente le labbra all'imboccatura superiore del tubo in modo da chiuderlo esattamente e nel momento stesso che si contraggono i muscoli espiratori del torace e dell'addome, si apre e poi subito si chiude il rubinetto. Il largo calibro del tubo d'ottone che sormonta una delle boccie e del tubo di gomma che le riunisce, nonchè il dislivello lasciato appositamente fra le due boccie, permettono di raccogliere rapidamente il campione d'aria che si vuole esaminare.

A. Loewy⁽¹⁾ si era già occupato di questo studio, con metodo alquanto diverso, perchè dell'aria espirata non tenne calcolo dei primi 140 c.³ da lui chiamati « spazio nocivo » (schädlicher Luftraum).

Il metodo che adoperei permette di studiare la tensione dell'acido carbonico e dell'ossigeno negli alveoli polmonari sotto diverse pressioni barometriche, senza essere l'aria diluita con quella che trovasi nella parte superiore dell'albero respiratorio.

(¹) Loewy, *Untersuchungen über die Respiration und Circulation bei Aenderung des Druckes*, Berlin, 1895, pag. 9.

Se teniamo calcolo della differenza fra l'azione dell'aria rarefatta sotto alla campana e sull'alta montagna, e il diverso grado di resistenza degli animali e dell'uomo, queste esperienze, vengono ad essere la continuazione e il complemento di quelle che feci precedentemente sulle cavie al Monte Rosa ⁽¹⁾.

La composizione centesimale dell'aria, venne sempre determinata coll'apparecchio di V. Grandis ⁽²⁾, di cui controllai più volte l'esattezza facendo l'analisi dell'aria esterna.

Percentuale del CO₂ e O₂; loro tensione parziale negli alveoli polmonari in condizioni normali.

Le analisi dei campioni d'aria raccolti nel modo suddetto e alla pressione normale, mostrano che, in condizioni fisiologiche, l'aria negli alveoli polmonari non ha rigorosamente una composizione centesimale costante, ciò perchè gli scambi dell'acido carbonico e dell'ossigeno non dipendono unicamente dal grado di permeabilità delle pareti alveolari e dal grado di combinazione e dissociazione del sangue rispettivamente coll'ossigeno e coll'acido carbonico, ma dipendono anche dalle condizioni in cui si trova l'individuo nel momento dell'esperimento. Però nell'individuo in riposo, rimanendo il lavoro muscolare e intellettuale pressapoco costante, le determinazioni fatte alle stesse ore della giornata sono assai concordanti, ciò che prova l'esattezza del metodo ⁽³⁾.

Nella tavola I ho diviso le osservazioni in due gruppi e ne riportai quattro fatte al mattino e quattro fatte al pomeriggio; come si vede i valori differiscono pochissimo fra loro; e le esperienze fatte al mattino essendo le più concordanti, mi decisi a fare preferibilmente le esperienze al mattino.

TAVOLA I.

| Data | Ora | Pressione baromet. | CO ₂ p. % | O ₂ p. % | O ₂ consu- mato | Tensione parziale CO ₂ in mm. Hg. | Tensione parziale O ₂ in mm. Hg. | Quoziente respiratorio |
|------------|------------------|-----------------------|----------------------|---------------------|-------------------------------|--|---|---------------------------|
| 5-V . . . | 8,45 | 745 | 5,9752 | 15,561 | 5,389 | 44,516 | 115,930 | 1,108 |
| 6 " . . . | 9 | 738 | 5,9723 | 14,761 | 6,189 | 44,075 | 108,940 | 0,9650 |
| 16 " . . . | 8 | 744 | 5,9864 | 14,121 | 6,829 | 44,539 | 105,060 | 0,8766 |
| 17 " . . . | 8 | 747 | 5,9831 | 14,426 | 6,524 | 44,694 | 107,760 | 0,9171 |
| 11 " . . . | 14 | 747 | 6,6946 | 14,371 | 6,579 | 50,009 | 107,35 | 1,017 |
| 11 " . . . | 16 $\frac{1}{2}$ | 747 | 6,3843 | 14,786 | 6,164 | 47,690 | 110,45 | 1,035 |
| 16 " . . . | 15 | 744 | 6,2446 | 15,645 | 5,305 | 46,460 | 116,40 | 1,177 |
| 16 " . . . | 18 | 744 | 6,5454 | 15,103 | 5,847 | 48,696 | 112,37 | 1,119 |

(1) Rend. R. Accad. Lincei. Sedute 24 aprile e 1° maggio 1904.

(2) V. Grandi, *Description d'un crasiotonomètre*. Arch. Ital. di Biol., XXIX, p. 325.

(3) Il maggior numero delle esperienze venne fatto sopra me stesso: ho l'età di anni 27: peso chilogrammi 72, sono alto metri 1,86 ed ho la capacità vitale di litri 5,327.

Percentuale del CO₂ e O₂; loro tensione parziale negli alveoli polmonari nell'aria rarefatta.

Fatta questa prima serie di ricerche, mi accinsi allo studio delle alterazioni che si producono nell'aria residua per effetto della depressione barometrica. Le esperienze che riferisco nella tav. II sono fatte nel seguente modo: dopo preso nel modo suddetto un campione dell'aria di riserva, entravo nella camera pneumatica di ferro descritta nelle Note precedenti, nella quale per mezzo di due pompe messe in azione da un motore elettrico si produceva una forte corrente di aria. Diminuendo per mezzo di una chiavetta l'afflusso dell'aria, le pompe producevano una diminuzione della pressione barometrica, rimanendo pur tuttavia così rapido il ricambio dell'aria sotto alla campana pneumatica, da restare escluso che potesse in tale modo modificarsi la composizione dell'aria inspirata. Io portavo meco quattro paia di recipienti costituiti ciascuno da due ampole di vetro della capacità di 200 cc. e comunicanti fra loro con un tubo di gomma lungo circa 60 cm.; uno di questi recipienti era pieno di cloruro sodico in soluzione satura: tale pipetta poteva chiudersi con un tubo di gomma ed una pinzetta. Stando in piedi, dopo preparate le boccie e tenendone una alta e l'altra bassa come trovasi rappresentato nella figura, prendevo un campione dell'aria alveolare nel modo già descritto e chiuso il rubinetto, riempivo con acqua salata la porzione di tubo sovrastante al medesimo. Un tappo di gomma attraversato da un tubo di vetro introdotto nel tubo d'ottone, serviva per travasare l'aria contenuta dentro la boccia nelle pipette, per poterla esaminare dopo finita l'esperienza.

Come si vede dalla seguente tabella, ho preso talora quattro campioni di aria restando sotto alla campana pneumatica fino alla rarefazione di mezza atmosfera. Dai risultati delle analisi contenuti nella presente tabella risulta, che rarefacendosi l'aria, aumenta la quantità di acido carbonico contenuto nei polmoni e diminuisce quella dell'ossigeno. Queste alterazioni dell'aria negli alveoli cominciano a manifestarsi a pressione assai più vicina alla normale di quanto non si credesse prima dagli autori.

Loewy infatti ammette che le esperienze fatte colla campana pneumatica si possono dividere in due grandi gruppi: quelle nelle quali la pressione non scende sotto i 450 mm. di Hg, e quelle in cui si raggiungono rarefazioni più forti: nel primo gruppo i fenomeni respiratori secondo Loewy, rimangono inalterati, nel secondo si ha un forte innalzamento del volume d'aria respirata, con aumento del CO₂ eliminato, e dell'O₂ consumato.

Anche Jaquet e Stähelin ⁽¹⁾ recentemente in base alle loro ricerche, cre-

⁽¹⁾ *Stoffwechselversuch im Hochgebirge* — *Arch. f. experimentelle Pathol. und Pharmacol.* 1901, p. 286.

dono di poter distinguere le esperienze nell'aria rarefatta per mezzo della campana pneumatica, in tre gruppi:

TAVOLA II.

| Data | Ora | Press'one baromet. in m.m. | CO ₂ per ‰ | O ₂ per ‰ | O ₂ con- sumato | Tensione parziale del CO ₂ in mm. di Hg. | Tensione parziale del O ₂ in mm. di Hg. | Quoziente respira- torio | Annotazioni |
|---------------|-------|----------------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------------|---|--|--------------------------------|---|
| A. Aggazzotti | | | | | | | | | |
| 5-V. . . . | 9 | 745 | 5,9752 | 15,561 | 5,389 | 44,516 | 115,930 | 1,1080 | Preso un caffè e latte alle ore 7.30. |
| " | " | 642 | 5,2869 | 15,955 | 4,995 | 33,943 | 102,440 | 1,0580 | |
| " | " | 542 | 7,7638 | 15,262 | 5,688 | 42,080 | 82,721 | 1,3640 | |
| " | " | 382 | 9,5237 | 12,904 | 8,043 | 32,594 | 49,294 | 1,0600 | |
| 6-V. . . . | 9 | 738 | 5,9723 | 14,761 | 6,189 | 44,075 | 108,940 | 0,9650 | Completamente a digiuno da 14 ore. 15 minuti dopo. |
| " | " | 538 | 6,6357 | 12,088 | 8,862 | 35,700 | 65,033 | 0,7487 | |
| " | " | 358 | 7,2448 | 12,941 | 8,009 | 20,602 | 46,331 | 0,9046 | |
| " | " | " | 8,2346 | 13,527 | 7,423 | 29,483 | 48,427 | 1,1090 | |
| " | " | 538 | 6,1533 | 14,760 | 6,190 | 33,104 | 79,408 | 0,9940 | |
| 16-V. . . . | 8 | 744 | 5,9864 | 14,121 | 6,829 | 44,539 | 105,060 | 0,8766 | Ho preso un caffè e latte alle ore 7.30. |
| " | " | 644 | 6,9141 | 13,090 | 7,860 | 44,526 | 84,301 | 0,8796 | |
| " | " | 604 | 7,1117 | 12,272 | 8,678 | 42,955 | 74,122 | 0,8195 | |
| " | " | 484 | 9,0817 | 10,823 | 10,127 | 43,955 | 52,383 | 0,8967 | |
| " | " | 744 | 5,2580 | 14,971 | 5,979 | 29,210 | 111,390 | 0,8814 | |
| 17-V. . . . | 8 | 747 | 5,9831 | 14,426 | 6,524 | 44,694 | 107,760 | 0,9171 | Preso un caffè e latte alle ore 7. |
| " | " | 697 | 5,7602 | 14,508 | 6,442 | 40,148 | 127,300 | 0,9841 | |
| " | " | 647 | 6,0013 | 14,413 | 6,537 | 38,828 | 93,249 | 0,9180 | |
| " | " | 597 | 7,1113 | 13,589 | 7,361 | 42,454 | 81,123 | 0,9660 | |
| A. Mosso | | | | | | | | | |
| 7-V. . . . | 10.30 | 736 | 4,9867 | 15,643 | 5,307 | 36,702 | 115,140 | 0,9396 | |
| " | " | 536 | 6,8465 | 13,230 | 7,720 | 36,697 | 70,914 | 0,8868 | |
| C. Foà | | | | | | | | | |
| 8-V. . . . | 10 | 745 | 4,9952 | 15,984 | 4,966 | 37,214 | 119,080 | 1,005 | |
| " | " | 425 | 8,5898 | 12,232 | 8,318 | 36,506 | 53,195 | 1,032 | |
| G. Mondo | | | | | | | | | |
| 7-V. . . . | 16.30 | 734 | 5,4253 | 16,355 | 4,595 | 39,821 | 120,050 | 1,180 | 30 minuti dopo. |
| " | " | 534 | 7,0384 | 14,197 | 6,753 | 37,585 | 75,814 | 1,042 | |
| " | " | " | 7,3495 | 14,229 | 7,450 | 39,227 | 75,984 | 1,093 | |

1° Esperienze fatte con una rarefazione minore di $\frac{3}{4}$ o $\frac{2}{3}$ di atmosfera o con una diminuzione della percentuale dell'ossigeno nell'aria inspirata fino

a circa 15%: in esse non si può, con sicurezza, riscontrare alcun cambiamento negli scambi respiratori.

2° Esperienze fatte ad una pressione di $\frac{2}{3}$ o $\frac{3}{4}$ di atmosfera o con una percentuale d'O₂ del 15 %: in esse, per alcuni autori, si ha un rinforzo della meccanica respiratoria senza però avere un cambiamento negli scambi respiratori; per alcuni altri, notevole aumento del CO₂ eliminato e del O₂ consumato; però sempre in misura tale da essere spiegati coll'aumentata meccanica respiratoria.

3° Esperienze fatte con una depressione di 350-450 mm. di Hg o con una percentuale del 9-12 % di O₂, in esse comparisce un mutamento costante negli scambi respiratori, il consumo dell'O₂ aumenta, l'eliminazione del CO₂ rimane uguale o diminuisce.

Dai risultati delle nostre esperienze si vede come non siano giuste queste classificazioni, poichè le alterazioni del chimismo respiratorio incominciano sempre prima di $\frac{2}{3}$ o $\frac{3}{4}$ di atmosfera. Esse incominciano gradatamente, in modo che è difficile poter dire con precisione, dove termina il normale ed incominciano gli effetti dell'aria rarefatta. Nell'esperienza 16-V in cui presi il primo campione alla pressione di 644 m.m. trovai l'acido carbonico già aumentato da 5,9864 % a 6,9141 %, e l'ossigeno diminuito da 14,121 % a 13,099 %, però questa fu una eccezione. Nell'esperienza 17-V presi un campione più spesso, ogni volta che la pressione era diminuita di 50 mm. di Hg e ad ogni grado di rarefazione prima di prendere il campione, attendevo cinque minuti; in essa si vede che i mutamenti avvengono assai più gradatamente: il primo campione che presi alla pressione normale, ma quando già mi trovavo sotto la campana, per escludere l'azione che i preparativi dell'esperienza potessero avere per loro stessi sull'intensità degli scambi respiratori, diede dei valori che non differivano dagli altri valori normali. Nel campione preso alla pressione di 697 mm., trovai una percentuale di acido carbonico lievemente minore, e una percentuale d'ossigeno lievemente aumentata. Nel terzo campione alla pressione di 647 mm. trovai 0,1 % di più di CO₂, mentre l'ossigeno rimase presso a poco normale. A questo punto pare incominci ad aumentare l'eliminazione del CO₂ poichè nel quarto campione, preso alla pressione di 597 mm., l'acido carbonico v'era già cresciuto del 1,2 % e l'ossigeno diminuito del 1 %.

Siccome però anche nell'esperienza 5-V trovai nel primo campione preso alla pressione di 642 la lieve diminuzione del 0,7 % nella percentuale del CO e un lievissimo aumento 0,4 % del O₂, possiamo ritenere costante come primo effetto una diminuzione nelle percentuali del CO₂ e un aumento in quella del O₂; effetto lieve e di breve durata, perchè presto comparisce l'aumento degli scambi respiratori. In media questa incomincia fra 647 e 597 mm. di pressione, cioè a circa $\frac{8}{10}$ di atmosfera. Alla pressione di 506 mm. e a maggior ragione alla pressione di 450 mm., ritenuti come limiti nella com-

parsa degli effetti dell'aria rarefatta, dagli autori su citati, le alterazioni nel ricambio respiratorio sono già molto forti.

Infatti considerando le esperienze in cui si arrivò a rarefazioni più forti, troviamo che fra $\frac{8}{10}$ e $\frac{7}{10}$ di atmosfera, fra 608 e 532 mm., l'acido carbonico eliminato aumenta del 1,8 al 2,5 % e l'ossigeno consumato aumenta pure del 2-3 %. Alla pressione di $\frac{6}{10}$ di atmosfera 456 mm., l'aumento nell'eliminazione del CO_2 arriva fino al 3,5 % e l'aumento nel consumo di ossigeno è di altrettanto. A rarefazioni minori di $\frac{6}{10}$ la percentuale del CO_2 pare non continui ad aumentare, ma s'abbassi; quella dell'ossigeno seguita a diminuire.

Però i valori che si ottengono a forti rarefazioni, non sono fra loro così perfettamente concordanti come i valori alla pressione normale, o quando essa è di poco diminuita e le oscillazioni sono assai più forti.

Dai valori medi di tutte le esperienze fatte, noi possiamo concludere *che appena si abbassa la pressione barometrica, la percentuale del CO_2 negli alveoli diminuisce, ma che già fra 684 e 608 mm. incomincia a manifestarsi una eliminazione maggiore del normale di acido carbonico ed un consumo pure più forte di ossigeno. Alla pressione di 608 e 456 mm. questi effetti diventano rapidamente molto evidenti e raggiungono il loro valore massimo alla pressione di circa 456 mm.* Dopo questo limite, inferiore all'altezza del Monte Rosa, continuando la rarefazione dell'aria, diminuisce la percentuale dell'acido carbonico e quella dell' O_2 continua ancora a diminuire, ma più lentamente. *Nell'aria fortemente rarefatta e per valori eguali della pressione barometrica le oscillazioni nelle percentuali del CO_2 e O_2 contenuti nell'aria di riserva, sono assai più forti che alla pressione normale o di poco diminuita.*

Questi risultati concordano con quanto trovarono Mosso e Marro⁽¹⁾ studiando l'acapnia prodotta nell'uomo dalla diminuita pressione barometrica. Essi riscontrarono che l'insergente Giorgio Mondo alla pressione di 545 mm., eliminava in 30 minuti da 1,5 a 2 grammi di CO_2 in più che nel normale. Sulla stessa persona ho voluto ripetere l'esperienza, rimanendo nelle medesime condizioni, ma osservando solamente i cambiamenti prodotti dall'aria rarefatta sull'aria di riserva, e non in tutta l'aria espirata in 30 minuti. Alla pressione di 734 mm. trovai 5,1253 % di CO_2 e 16,355 % di O_2 . Appena la pressione arrivò a 534 mm. trovai 7,0384 % di CO_2 e 14,197 % di O_2 : dopo 30 minuti che la persona in esperimento si trovava a questa pressione, trovai 7,3459 % di CO_2 e 14,229 % di O_2 .

I valori di queste esperienze verranno più attentamente esaminati in una Nota successiva.

(1) Mosso e Marro, *L'acapnia prodotta nell'uomo dalla diminuita pressione barometrica*. Rendic. Accad. dei Lincei, seduta del 21 giugno 1903.

Fisiologia. — *Sull'importanza dell'ossigeno nelle funzioni del midollo spinale isolato.* Nota del dott. SILVESTRO BAGLIONI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

1. *Materiale e metodo di ricerca.* — Il midollo spinale isolato della *rana temporaria* fu il materiale di ricerca delle presenti esperienze. Esso rappresenta l'unità più semplice anatomica e fisiologica, che si possa ottenere sperimentalmente del complesso sistema nervoso centrale. Come indice naturale e normale della sua vita e delle sue funzioni furono prevalentemente utilizzati i movimenti riflessi, che si ottengono facilmente da un simile preparato, toccando o stimolando in un modo qualsiasi la pelle del piede. Sottrattolo ad ogni rapporto normale, che esso ha col corpo restante, il sistema circolatorio e respiratorio in prima linea, che ne complicano im-



FIG. 1. — *ms.* midollo spinale messo allo scoperto nella sua parte dorsale e in comunicazione diretta mercè il nervo ischiatico colla gamba (*mu*, muscoli denudati, *p*, pelle conservata sino al punto *x*). $\frac{4}{7}$ della grandezza naturale.

mensamente lo studio, fu facile stabilire alcune condizioni esterne sperimentali, soddisfatte le quali potesse rimanere in vita per un tempo assai lungo. Con ciò si son messi in vista non pochi fatti sperimentali sulle condizioni vitali, a cui è legata strettamente la funzionalità normale del sistema nervoso centrale.

La fig. 1 è la riproduzione fotografica impiccolita di un midollo spinale isolato di rana usato in queste esperienze; da essa figura e dalla sua illustrazione emerge chiaramente l'operazione mediante la quale si ottiene l'iso-

lamento del midollo rispettando i suoi diretti e normali rapporti, sia cogli organi terminali di senso (pelle del piede), come di moto (muscoli della gamba), necessari per la estrinsecazione della sua attività.

Oltre i movimenti riflessi si utilizzarono talora, in circostanze speciali, come indice dell'attività funzionale dei centri nervosi i movimenti ottenuti mercè la *stimolazione diretta* del midollo spinale e precisamente sia stimolando lievemente la parte suprema del midollo reciso (la superficie del taglio) come stimolando la sostanza nervosa della *pars lumbalis*. Se nel primo caso avvengono delle contrazioni dei muscoli della gamba, e se nel secondo queste contrazioni sono *fibrillari* o *tetaniformi durature* (che durano cioè molto più a lungo della stimolazione) si è certi, che i centri nervosi motori del midollo spinale vivono ancora ⁽¹⁾.

Prima di utilizzare il preparato per l'esperienza, lo si poneva per 10-15 minuti in un piccolo recipiente, che conteneva una soluzione fisiologica di NaCl (0,7-0,9 %) o il più spesso la soluzione fisiologica di Ringer (quella da me usata aveva la seguente composizione: in 1 litro di acqua distillata, 0,1 gr. NaHCO_3 , 0,1 gr. CaCl_2 , 0,075 gr. KCl, 6-7 gr. NaCl: $\Delta = -0,470$) dove lo si scuoteva o si smuoveva leggermente con un pennellino per lavarlo e specialmente per liberarlo dai sali calcici, di cui sono talora ricche le sue meningi.

Tutte le esperienze, di cui qui è parola, furono eseguite nell'inverno e nel principio della primavera, alla temperatura però dell'ambiente oscillante tra $+16$ e $+20^\circ \text{C}$. Le rane utilizzate vivevano prima dell'esperienza nel ranario ad una temperatura invernale di circa $+5^\circ \text{C}$.

2. Esperienze e loro risultati. — a) In un medium gasoso.

Se si pone un preparato così isolato in una camera umida alla presenza dell'aria, impedendo accuratamente, che non si dissecchi in alcuna sua parte, e si prova quindi di tanto in tanto col metodo anzidetto l'eccitabilità riflessa, si nota come *dopo circa un'ora* dall'operazione si rende sempre più difficile il determinare un riflesso con stimoli meccanici deboli: si deve ricorrere ai più forti per ottenere talora una minima traccia di movimento riflesso. Dopo *un'ora e mezzo* o *due ore* al più ogni attività riflessa è completamente scomparsa anche ai più forti stimoli. Che questa scomparsa dei riflessi dipenda dal fatto, che i centri sono diventati inecceitabili, lo si prova constatando che tanto i nervi motorî che i muscoli reagiscono squisitamente a ogni stimolo: mentre stimolando direttamente i centri medesimi non si ha alcuna traccia di loro reazione.

⁽¹⁾ Cfr. E. A. Birge, *Ueber die Reizbarkeit der motorischen Ganglienzellen des Rückenmarkes*. Arch. f. Anat. und Physiol., 1882, pag. 481; e S. Baglioni, *Physiologische Differenzierung verschiedener Mechanismen des Rückenmarkes*, nello stesso Arch. Suppl. Bd. 1900, pag. 193.

Da che dipende la perdita di eccitabilità e la morte del midollo spinale in queste circostanze? Il seguente esperimento dà chiaramente la risposta a questa domanda.

S'introduce un tale midollo nella piccola camera di vetro della fig. 2, assicurandolo ad un filo, che vien legato alla parte superiore della colonna

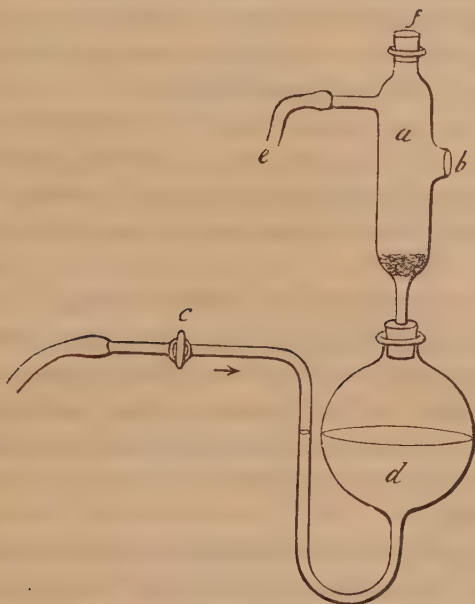


FIG. 2. — $\frac{1}{3}$ della grandezza naturale.

vertebrale e si fissa col tappo di gomma *f*, che chiude superiormente la piccola camera. Si fa passare quindi il nervo ischiatico e la gamba attraverso il foro laterale (*b*) per posarla sopra un'adatta lastra di vetro, onde potersene agevolmente servire per stimolarne all'uopo la pelle e constatare così la vitalità del midollo rinchiuso. Il foro laterale vien chiuso quindi a tenuta di gas con batufoli di ovatta imbevuta di una soluzione fisiologica, badando di non ledere menomamente il nervo.

Aperto quindi il rubinetto *c*, si lascia passare una corrente di ossigeno, il quale, dopo aver attraversato una bottiglia di lavaggio (non disegnata nella figura) contenente acqua distillata, viene ad attraversare il vaso sferico *d*, che contiene anch'esso sino a metà acqua distillata, e quindi carico di vapor acqueo attraverso la piccola camera *a* (dove è il midollo) e fuoriesce per l'apertura *e* andando a gorgogliare in un'altra bottiglia di lavaggio prima di uscire all'aria aperta.

Se si prova ora di tanto in tanto l'attività riflessa di questo midollo spinale, toccando lievemente o stimolando in altro modo qualsiasi la pelle dei piedi, che, come si è detto, restano al di fuori della camera, si nota tosto che si possono ottenere dei movimenti riflessi per un tempo incomparabilmente più lungo di quando si lasciava il midollo alla comune atmosfera. *Dopo venti ore di un tale soggiorno in un'atmosfera di ossigeno* (usando naturalmente ogni cautela per tener lontana qualsiasi causa esterna dannosa, specialmente il disseccamento del nervo) *si possono avere ancora dei chiari movimenti riflessi.* Dopo un tale periodo di tempo ordinariamente scompare per sempre ogni reazione riflessa centrale.

Se si estrae però dopo questo tempo il midollo dalla camera e lo si stimola direttamente, ci si può convincere della vita ancora presente delle cellule nervose. La scomparsa quindi dei riflessi, in questo caso non indica la morte del midollo spinale. A che cosa si deve allora la scomparsa dei riflessi?

Che la branca afferente (motoria) dell'arco riflessa e i muscoli oltre ai centri funzionano ancora, è dimostrato dalla stimolazione diretta del midollo, per cui si hanno contrazioni fibrillari durature della gambe. Rimane dunque la branca afferente (sensitiva). Di questa il primo dubbio che sorge, è che le terminazioni sensitive cutanee, lontane dal circolo sanguigno, e quindi prive d'ossigeno, cessino di vivere. Gli esperimenti diretti a questo scopo diedero ragione a quest'ipotesi.

Se si lega infatti ad una rana vivente l'arteria ischiatica nel suo punto di uscita dal bacino, impedendo con ciò il circolo sanguigno di un arto posteriore, si ha che, stimolando la pelle del piede dello stesso arto, si possono determinare riflessi solamente per un tempo che oscilla appunto tra le 18 e le 20 ore dopo l'operazione: dopo questo periodo scompare ogni riflesso dalla pelle del piede in parola, mentre naturalmente tutto il resto del corpo è perfettamente normale.

Si può quindi con certezza concludere, che da un *preparato spinale, il cui midollo fu posto in un'atmosfera di ossigeno, si possono ottenere dei moti riflessi per un periodo di venti ore, e che dopo questo tempo si ha la scomparsa dei riflessi non per la morte delle cellule nervose, bensì per la sopravvenuta ineccitabilità delle terminazioni sensitive cutanee per mancanza di ossigeno.*

Si pone infatti — come vedremo in seguito — anche la pelle in una atmosfera di ossigeno, allora si possono avere dei riflessi per un tempo ancora molto più lungo.

La seguente domanda è: quale pressione del gas ossigeno è strettamente necessaria per mantenere in vita un tale preparato? Per rispondere esattamente a questo quesito non furono fatte sufficienti esperienze. In ogni modo si trovò, che se si fa passare colle stesse modalità di esperimento attraverso la

camera invece di ossigeno una corrente di aria (che come è noto contiene circa 20 % di ossigeno), si nota dopo un'ora e mezzo o due ore circa la morte del preparato, precisamente come accade tenendolo in una camera umida alla presenza dell'aria. Se immediatamente dopo l'entrata di questa completa paralisi, si lascia passare invece dell'aria una corrente di ossigeno, i centri tornano allora a rivivere pienamente rimostrando completa la loro attività riflessa.

La pressione quindi dell'ossigeno necessaria deve cadere senza dubbio tra il 20 e il 100 %.

Interessante sarebbe ancora stabilire gli effetti di più alte pressioni di ossigeno, come anche l'azione dell'ozono.

Ulteriormente io diressi i miei esperimenti a stabilire gli effetti del soggiorno di un tale midollo in un'atmosfera priva di ossigeno.

A tal uopo io mi servii del medesimo metodo sperimentale, lasciando passare attraverso la camera invece di ossigeno una *corrente di azoto* privo di ogni traccia di ossigeno secondo il metodo di v. Baeyer ⁽¹⁾. Si nota allora come, forse dopo un breve periodo di eccitabilità riflessa molto elevata, scompaiono a poco a poco i movimenti riflessi, *finchè dopo tre quarti d'ora* circa non è più possibile determinare sperimentalmente riflessi di sorta, *mentre il nervo direttamente stimolato conserva pienamente la sua eccitabilità*.

Il midollo è quindi molto sensibile alla sottrazione completa dell'ossigeno. Data la legge della diffusione dei gas, certamente qui si ha che la corrente di azoto sottrae attivamente l'ossigeno depositato nelle cellule nervose. Il fatto che la morte per sottrazione di ossigeno (asfissia) avvenga dopo tre quarti d'ora circa e non prima, è in rapporto molto probabilmente con l'ossigeno, che si può chiamare di *riserva*, depositato nei centri nervosi ⁽²⁾.

Se dopo entrata la paralisi completa dei centri per asfissia (in presenza cioè di azoto) si lascia passare di nuovo una corrente di ossigeno, si ha che dopo *tre quarti d'ora* circa il midollo rive pienamente, tornando a comparire i riflessi come prima della sottrazione di ossigeno. Questa rivivificazione dei centri mercè l'ossigeno ha però i suoi limiti: nel senso che se dopo entrata l'asfissia si attende qualche tempo (un'ora ad es.) prima di lasciar passare la corrente di ossigeno, allora non si ha più il ritorno dei centri allo stato primitivo di attività riflessa: le cellule nervose sono in questo caso morte per sempre irreparabilmente.

Se avvenuta tale rivivificazione dei centri si lascia subito dopo di nuovo passare una corrente di azoto, si ha allora la paralisi in un tempo molto più

⁽¹⁾ v. Baeyer, *Das Sauerstoffbedürfniss des Nerven*. Zeitschrift f. allgem. Physiol. Bd. 2. 1903, pag. 169.

⁽²⁾ O. Bondy, *Untersuchungen über die Sauerstoffaufspeicherung in den Nervencentren*. Zeit. f. allgem. Pysiol. Bd. 3, pag. 180, 1903.

breve che dappprincipio, cioè in un quarto d'ora. Questo fatto è senza dubbio in rapporto coll'accennato ossigeno di *riserva*, che in questo caso non ha potuto depositarsi in sufficiente quantità per il breve tempo in cui i centri sono stati alla presenza dell'ossigeno.

Se invece dell'ossigeno, dopo la paralisi avvenuta mercè una corrente di azoto, si lascia passare una corrente d'aria, *i centri non riacquistano la vitalità*. Anche in questo caso la pressione dell'ossigeno contenuto nell'aria non è sufficiente a rivivificare i centri asfissati: un fatto, ch'era da attendersi *a priori* dopo gli esperimenti negativi coll'aria più sopra accennati.

b) In un *medium* liquido. La considerazione, che in tutte le esperienze sin qui descritte del midollo posto in un *medium* gassoso, cioè in una camera per cui si fa passare una corrente di ossigeno, questo gas non viene in diretto contatto delle cellule nervose se non attraverso un strato liquido più o meno considerevole, rappresentato dai succhi linfatici pericellulari e da quello straterello di soluzione fisiologica aderente al midollo, necessario ad impedire il disseccamento del midollo stesso, faceva molto probabile per non dire sicuro *a priori* il fatto, che un tale midollo posto in una soluzione fisiologica, attraverso cui si faccia gorgogliare continuamente ossigeno, avrebbe vissuto almeno altrettanto a lungo. Quest'aspettativa teoretica venne completamente confermata dall'esperimento.

Per queste esperienze furono adoperati diversi apparecchi più o meno corrispondenti allo scopo. Quello che diede i migliori risultati era rappresentato da una comune bottiglia di lavaggio alquanto modificata. Il preparato questa volta si pone nella soluzione per intero — cioè midollo e gamba — per osservarne i riflessi è necessario però aprire la bottiglia, con uno specillo allora è facile toccare la pelle (talora si possono osservare però i riflessi, anche senza l'apertura della bottiglia, cioè scuotendola alquanto). In compenso si ha però, che anche le terminazioni nervose sensitive cutanee vengono a stare in un'atmosfera di ossigeno. Il che ha una grande importanza, perchè in questo caso viene ad essere eliminato l'inconveniente più sopra lamentato per la camera a gas, che cioè dopo venti ore o poco più si abbia la morte non del midollo, bensì delle terminazioni sensitive per mancanza di ossigeno: ciò che impedisce di costatare ulteriori riflessi.

Infatti, ponendo nel modo testè accennato un preparato di rana nella descritta bottiglia contenente circa 80-90 c.³ di soluzione di Ringer (che si ha cura di rinnovare ogni 6-8 ore), attraverso cui si fa gorgogliare una lenta corrente di ossigeno e provandone di tanto in tanto l'attività riflessa, si nota come *ordinariamente si possono costatare riflessi pel periodo di 36 ore e anche più (persino 48 ore)*.

Dopo questo periodo di tempo scompare ordinariamente ogni attività riflessa, sebbene l'ossigeno continui ad attraversare la soluzione. Da che cosa dipenda questa scomparsa di vitalità dei centri non è facile stabilire. Due

possibilità si presentano al riguardo: l'una che si tratti di *esaurimento* dei centri nervosi, consecutivo alla mancanza di materiali nutritivi (al di fuori dell'ossigeno e dei sali inorganici) nella soluzione fisiologica in cui giace, e l'altra che si tratti d'influenza batterica. Quest'ultima possibilità è quella che a me pare in base alle seguenti osservazioni sperimentali la più probabile.

1. Dopo un tale periodo di tempo si nota sempre un odore di putrefazione nella soluzione, in cui giace il preparato, che per quanto si rinnovelli spesso la medesima non si può evitare.

2. È praticamente impossibile sterilizzare completamente il preparato, adoperando tutte le cautele asettiche, poichè, com'è noto, moltissimi batteri restano innicchiati nei pori e nelle glandole della pelle, che è necessario risparmiare per utilizzarla onde determinarne i riflessi.

3. Si ha la morte del preparato dopo un tale periodo di tempo, anche se alla soluzione usata si aggiunse una lieve quantità di glucosio.

4. Se si avvelenano le cellule nervose sensitive con una leggiera dose di stricnina, per cui si hanno continui e violenti *tetani*, la scomparsa dei movimenti riflessi non avviene in un tempo sensibilmente più breve (30-34 ore) del normale. Si può concludere che le altre sostanze organiche — oltre l'ossigeno — necessarie al metabolismo vitale dei centri sono in grande quantità depositate nelle cellule nervose, come materiale di riserva, e che un *esaurimento* per mancanza delle medesime non è da ottenere in un periodo abbastanza lungo di attività anche esagerata.

5. Se non si rinnova di frequente la soluzione, la morte avviene più presto del consueto.

Riguardo all'ultimo fatto si può però anche pensare, che nella soluzione adoperata si vadano accumulando prodotti catabolici del ricambio materiale dei centri, che analogamente a quanto avviene per i prodotti della *fatica* (autointossicazione) impediscano ulteriormente l'attività vitale dei centri. Infatti si notò ordinariamente, che un preparato, il quale per aver giaciuto per lungo tempo nella medesima soluzione non dava di sè quasi più segno di vita, pochi minuti dopo aver cambiato la soluzione si ripresentava nella sua piena attività riflessa.

Non solo, ma si notò anche costantemente, che il tempo impiegato per aversi l'ineccitabilità era in diretta proporzione colla quantità di soluzione usata: quanto più grande era la quantità di soluzione (80-90 c.³) tanto più a lungo durava l'eccitabilità (8-10 ore): mentre se si usava una più piccola quantità (40-20 c.³) più breve ne era l'attività riflessa (4-6 ore). Donde la necessità di rinnovare di tanto in tanto la soluzione in cui giaceva il midollo.

Si notò anche come un'ulteriore aggiunta di liquido alla soluzione, in cui giaceva pressochè ineccitabile il midollo per avervi troppo a lungo giaciuto, ridava immediatamente l'eccitabilità riflessa normale.

Si può concludere quindi, che qui trattasi di una sostanza nociva solubile nell'acqua, che va a mano a mano accumulandosi, sinchè ha raggiunto quel grado di concentrazione necessario per sviluppare completa la sua azione deleteria sui centri nervosi, che giacciono nel liquido. Col rinnovarsi del liquido si allontana la detta sostanza, che ha già raggiunto la concentrazione necessaria alla sua influenza dannosa — coll'aggiunta di altro liquido si diluisce momentaneamente la concentrazione di essa, per cui ridiventa inefficace.

Di che natura è questa sostanza nociva, che va mano mano accumulandosi?

La prima idea, che sorge, è che si tratti di un prodotto del ricambio materiale dei centri (forse anidride carbonica): ma si potrebbe anche pensare a prodotti tossici d'origine batterica.

Per risolvere la questione fu fatta *bollire* la soluzione entro cui era stato a lungo e aveva perduta la sua attività riflessa il midollo spinale. Quindi dopo averla raffreddata e filtrata e dopo avervi aggiunto la quantità di acqua distillata perduta bollendo, fu adibita per un'altra esperienza. Vi fu posto un midollo spinale e si notò con grande meraviglia che questa volta il midollo spinale vi visse per un tempo incomparabilmente più lungo che prima (quasi trenta ore!)

Da questo fatto sperimentale però non viene risolta assolutamente la questione sulla *natura* della sostanza nociva, che si va accumulando nel liquido ambiente del midollo isolato. Io mi riservo di istituire ulteriori ricerche a tal uopo, che possano portare un po' più di luce a questa domanda.

Comunque, dalle esperienze accennate emerge la necessità di usare come *medium* pel midollo isolato liquidi precedentemente bolliti: il che fu fatto senza eccezione nelle ulteriori esperienze: non solo, ma si sterilizzò sempre con acqua distillata bollente i recipienti usati pel midollo spinale prima di ogni esperienza.

Una domanda che si presenta spontanea in tutte queste ricerche sulla importanza dell'ossigeno nelle funzioni del midollo spinale isolato, è *come viene assorbito dalle cellule nervose l'ossigeno*, che sebbene sia presente nel loro *medium*, non giunge mai a toccarle senza prima dover attraversare uno strato di liquido (sia nella camera a gas, come molto più nelle soluzioni) da cui secondo le ricerche di Hoppe-Seyler ⁽¹⁾ viene assorbito abbastanza lentamente.

A questo riguardo si può pensare dapprima, che non le cellule nervose direttamente siano capaci di assorbire l'ossigeno ambiente, ma che ad esse

⁽¹⁾ Hoppe-Seyler, *Weitere Versuche über die Diffusion von Gasen in Wasser*. Zeitsch. f. physiol. Chemie Bd. 19, pag. 411, 1894.

venga trasmesso da quella piccola quantità di sangue stagnante, che rimane sempre dopo la preparazione, alla superficie del midollo e nei vasi del medesimo.

Per stabilire se questa piccola quantità di sangue avesse un'importanza nel fenomeno di assorbimento dell'ossigeno da parte dei centri, fu fatto circolare in una rana normale artificialmente per un certo tempo attraverso tutto il sistema circolatorio (legando una cannula all'ostio aortico) la soluzione fisiologica di Ringer, così che fu scacciato tutto il sangue dal corpo sostituendolo con essa soluzione fisiologica. Di questa rana resa così veramente *anemica* fu preparato nel modo usuale il midollo spinale e posto nell'apparecchio contenente una soluzione fisiologica, attraversata da una corrente di ossigeno. Si ebbero dei riflessi per un periodo di *trenta ore*. Si può concludere quindi, che la piccola quantità di sangue rimanente nel preparato non ha alcuna importanza sul fenomeno di assorbimento dell'O² da parte dei centri. Le cellule nervose sono capaci direttamente d'assumere l'ossigeno contenuto nel liquido pericellulare.

Per stabilire inoltre sino a qual punto questo assorbimento o meglio la diffusione dell'ossigeno attraverso i tessuti può aver luogo, fu posta nell'apparecchio una colonna vertebrale non aperta dorsalmente, ossia in cui il midollo era completamente ricoperto dalle vertebre nel modo normale. Solo nel punto più alto, dove si era disgiunta la colonna vertebrale dal capo, veniva la sostanza midollare nervosa a contatto diretto col liquido ambiente. Si ebbe per risultato, che talora scomparivano i riflessi dopo un'ora e mezzo o due ore, tal'altra si prolungavano per tre o quattro ore.

Si deve ammettere quindi, che in un tale preparato una certa quantità di ossigeno può giungere in date circostanze sino ai centri, ma che in ogni modo essa quantità è così piccola da non poterne permettere la vita per lungo tempo. Donde la necessità di aprire sempre la colonna vertebrale per mettere allo scoperto dorsalmente il midollo spinale.

c) *Esperienze con mezzi chimici ossidanti (acqua ossigenata)*. — Riguardo l'importanza dell'ossigeno per la funzionalità dei centri nervosi rimaneva a decidere la questione, se essi centri avessero la capacità di assorbire ed utilizzare questo elemento solamente quando è loro offerto in forma di gas, che come si sa dalla chimica è abbastanza inattivo, oppure se essi possono utilizzarlo quando è loro offerto con altri mezzi, ad es. mediante sostanze chimiche ossidanti.

A tal uopo si fecero esperienze con l'acqua ossigenata (perossido d'idrogeno H²O²) e si giunse alla conclusione, che *le cellule nervose del midollo spinale possono in realtà utilizzare l'ossigeno sviluppantesi da H²O² e sopravvivere a lungo in una soluzione fisiologica che lo contiene*.

Si pose infatti un tale preparato intero in un recipiente contenente 40 c.³ di soluzione di Ringer a cui si aggiunsero 4 c.³ di una soluzione

1 % di acqua ossigenata (Merck). Si notarono immediatamente molte contrazioni spontanee fibrillari, che però in breve tempo cessarono, seguite da movimenti regolari spontanei di flessione del piede nella gamba periodicamente (6-8 volte per minuto primo): che durarono per un'ora circa. *L'eccitabilità riflessa era intanto, e si mantenne sempre, notevolmente esagerata.* Intanto però si aveva per l'azione catalitica dei tessuti sul perossido d'idrogeno uno sviluppo di bollicine di gas intorno al midollo, al nervo, alla gamba e al piede, non solo esternamente ma anche entro i tessuti medesimi, per cui dopo mezz'ora circa apparivano tutti rigonfi, il nervo compreso, che perciò aveva perduta la sua naturale flessibilità. Ciò non ostante si ebbe la scomparsa dei riflessi solo dopo otto ore: scomparsa determinata dall'aver il midollo ghiaciuto per tanto tempo nello stesso liquido e forse anche (meno probabilmente) dall'essersi consumato l'ossigeno presente, poichè si ebbe la ricomparsa di essi riflessi dopo aver rinnovato la soluzione a cui si aggiunse parimenti una lieve quantità di H^2O^2 .

Lo stesso risultato si ebbe ponendo solo il midollo in 40 c.³ di soluzione di Ringer, a cui si aggiunse 1 c.³ di soluzione di H^2O^2 al 1 % (la gamba giaceva fuori del liquido). Anche stavolta si notò un'esagerazione dell'eccitabilità riflessa, con alcuni movimenti spontanei.

Il primo pensiero, che sorge, è che tale ipereccitabilità dipenda dal fatto che i centri siano sotto l'azione più viva e violenta dell'ossigeno nascente dell'acqua ossigenata: che si abbia, in altre parole, una leggera ossidazione delle molecole biogene e che quindi avvengano più vivamente e più estesamente le scariche di energia. Quanto sia di vero in quest'ipotesi lo potranno dimostrare altre esperienze intese a stabilire l'azione degli ossidanti in genere sul sistema nervoso.

In ogni modo qui possiamo concludere con tutta certezza che i *centri nervosi del midollo spinale non solo possono utilizzare per la loro vita e funzionalità l'ossigeno gas molecolare offerto loro sotto questa forma ad alta pressione, ma anche l'ossigeno offerto loro con mezzi chimici ossidanti (acqua ossigenata).*

CORRISPONDENZA

Il PRESIDENTE presenta un piego suggellato, inviato dal sig. F. Rocchi perchè sia conservato negli Archivi dell'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 19 giugno 1904.

- Achiardi (E. D')*. — Di alcuni minerali dei filoni tormaliniferi nel granito di S. Piero in Campo (Elba). Pisa, 1904. 8°.
- Calò B.* — Su alcuni problemi relativi alla deformazione delle congruenze. Napoli, 1904. 8°.
- Colomba L.* — Rodonite cristallizzata di S. Marcel (Valle d'Aosta). Torino, 1904. 8°.
- Faustini R.* — About some important polar Navigations to high Latitudes, translated from the italian by E. S. Balch. (from the Journal of the Franklin Institute. 1903. 8°).
- Alcune idee religiose degli Eschimesi. Roma, 1903. 8°.
- Alcune osservazioni sulla crociera dell'« Hertha » nel Mar Polare artico. Roma, 1900. 8°.
- Alla ricerca del dott. O. Nordenskjöld sulle coste occidentali della Terra di Graham. Città di Castello, 1903. 8°.
- Di una scoperta polare australe nel 1599. Pavia, 1901. 8°.
- Il ritorno della spedizione polare di S. A. R. il Duca degli Abruzzi. Roma, 1900. 8°.
- I risultati scientifici della spedizione antartica belga, secondo le pubblicazioni della « Belgica ». Roma, 1902. 8°.
- La crociera del comandante Irizar alla ricerca del dott. O. Nordenskjöld. Città di Castello, 1904. 8°.
- La spedizione artica americana di W. Wellmann. Roma, 1903. 8°.
- L'esodo eschimese (Un capitolo di antropogeografia artica). Pavia, 1903. 8°.
- Una questione artica. Roma, 1902. 8°.
- Uno sguardo sui lavori scientifici della spedizione antartica svedese. Roma, 1904. 8°.
- Un tipo caratteristico di ghiacciaio antartico. Pavia, 1901. 8°.
- Un viaggio alle Spitzbergen nell'anno 1671. 8°.
- Gatin-Grusewska Z.* — Das reine Glykogen. Bonn, 1904. 8°.
- Geological Literature added to the Geological Society's Library, during the year ended December 31st 1903. London, 1904. 8°.
- Girard M. Ch.* — Analyse des matières alimentaires et recherche de leurs falsifications. Deuxième édition. Paris, 1904. 8°.
- Karpinsky A.* — Ueber die eocambrische Cephalopodengattung Volborthella Schmidt. S. Petersburg, 1903. 8°.
- Ueber ein merkwürdiges sogenanntes Groruditgestein aus dem Transbaikalgebiete. S. Petersburg, 1904. 8°.

- Koelliker A.* — Ueber die Entwicklung der Nervenfasern. (Abdruck aus dem Anatom. Anzeiger. XXV Band. 1904).
- Leonardi Cattolica P.* — Operazioni astronomico-geodetiche eseguite negli anni 1901-902 a Portofino (Monte del Telegrafo), nell'Isola Maddalena (semaforo Guardia Vecchia) ed a Livorno (Accademia Navale). Resoconto. Genova, 1904. 4°.
- Meli R.* — Breve relazione delle escursioni geologiche eseguite nell'anno scolastico 1902-903. I. Alla cava Mazzanti presso il ponte Milvio nei dintorni di Roma. II. In Sicilia (Palermo-Solfara di Trabonella-Catania-Siracusa-Taormina-Messina). Roma, 1903. 8°.
- Id.* — Brevi notizie sulle rocce che si riscontrano nell'Abruzzo lungo il percorso dell'antica via Valeria, nel tratto Arsoli-Carsoli Sante Marie-Tagliacozzo-Avezzano-Forca Caruso-Collamele. Roma, 1904. 8°.
- Id.* — Escursione geologica sul litorale di Nettuno. Roma, 1904. 8°.
- Id.* — Sulla costituzione geologica del Monte Palatino in Roma. Roma, 1904. 8°.
- Nery Delgado J. F.* — Faune cambrienne du Haut Alemtéjo. Lisbonne, 1904. 8°.
- Passerini N.* — Analisi di un campione di Guano di pesci di Norvegia. Firenze, 1904. 8°.
- Id.* — Influenze della irrigazione ortiva sulla composizione del mosto e sopra la produzione delle viti. Firenze, 1904. 8°.
- Id.* — Sui danni prodotti alle piante dal ghiacciato dei giorni 19 e 20 aprile 1903. Firenze, 1903. 8°.
- Id.* — Sulla produttività del grano a differenti latitudini. Firenze, 1904. 8°.
- Pegrassi A.* — Le illusioni ottiche nelle figure planimetriche. Torino, 1904. 8°.
- Pflüger E.* — Ueber die im thierischen Körper sich vollziehende Bildung von Zucker aus Eiweiss und Fett. Zur Lehre des Diabetes mellitus. Bonn, 1904. 8°.
- Roiti A.* — Elementi di Fisica. Quarta edizione. Vol. secondo. Firenze, 1903-904. 8°.
- Silvestri F.* — Critiche di lavori sull'anatomia dei Miriapodi, ovvero: Intorno ad una certa risposta del dott. G. L. Rossi. (Dal Redia, vol. I, fasc. 2°, 1903). 8°.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
DELL' UNIVERSITÀ DI STRASSBURG.

- Aeckerlein G.* — Ueber die Zerstäubung Galvanisch glühender Metalle. Strassburg, 1902. 8°.
- Altschüler E.* — Die Conservierung des Hackfleisches mit (neutralen) schwe-

- fligsaurem Natrium und einige Bemerkungen über die Beurteilung des Zustandes von Hackfleisch. Strassburg, 1902. 8°.
- Arbogast A.* — Ueber Behandlung der Melaena Neonatorum mit Gelatine Injektionen. Strassburg, 1902. 8°.
- Baas H. H.* — Ueber Bacillus pseudanthracis. Strassburg, 1903. 8°.
- Bartels M.* — Ueber Encephalo-myelomeningitis diffusa haemorrhagica mit endophlebitischen Wucherungen. Berlin, 1902. 8°.
- Bauer J.* — Beiträge zu den Folgeerscheinungen der Uterusmyome und zur Kasuistik der Kolossalumoren der weibl. Genitalien. Strassburg, 1903. 8°.
- Benkowitz F.* — Ueber die operative Behandlung des Nachstars. Strassburg, 1902. 8°.
- Berger H.* — Ueber Rotationsflächen zweiten Grades, die einem gegebenen Tetraeder eingeschrieben sind. Strassburg, 1903. 8°.
- Bergheimer L.* — Ueber Schussverletzungen des Halsteils des Oesophagus. Strassburg, 1903. 8°.
- Bock K.* — Ueber die Kondensation von Benzaldehyd mit Itakonsäure. Strassburg, 1902. 8.
- Borg J.* — Ueber die Hutchinsonsche Sommerupkion. Strassburg, 1902. 8°.
- Brecker F.* — Ueber die durch Anlagerung von Ammoniak an ungesättigte Säuren entstehenden β -Amidosäuren. Strassburg, 1902. 8°.
- Brême G.* — Ueber die durch Pacchionische Granulationen verursachten Eindrücke der Schädelknochen. Stuttgart, 1903. 8°.
- Breymann M.* — Ueber Stoffwechselprodukte des Bacillus pyocyaneus. Jena, 1903. 8°.
- Butzon F.* — Ueber Nasenpolypen im Kindesalter. Strassburg, 1903. 8°.
- Diets R.* Ueber acute Leukaemie. Strassburg, 1903. 8°.
- Dinter A.* — Die Anlagerung von Ammoniak an die Muconsäure und die Oxydation der α - β - γ -Hydromuconsäuren. Strassburg, 1902. 8°.
- Ehrmann R.* — Ueber die Peroxyprotsäuren. Strassburg, 1903. 8°.
- Forster J.* — Bakteriologie und Hygiene. (Das Stiftungsfest des Kaiser-Wilhelms Universität). Strassburg, 1903. 8°.
- Friedmann E.* — Beiträge zur Kenntnis der physiologischen Beziehungen der schwefelhaltigen Einweissabkömmlinge:
- I. Ueber die Konstitution des Cystins.
 - II. α -Thiomilchsäure, ein Spaltungsprodukt der Keratinsubstanzen.
- Braunschweig, 1902. 8°.
- Fühner H.* — Lithotherapie. Historische Studien über die medizinische Verwendung der Edelsteine. Strassburg, 1902. 8°.
- Goellner A.* — Die Verbreitung der Echinokkenkrankheit in Elsass-Lothringen. Jena, 1902. 8°.
- Goering H.* — Zur Behandlung des Angioma arteriale racemosum, besonders des Kopfes. Strassburg, 1903. 8°.

- Grabi H.* — Schwangerschaft und Geburt bei Missbildungen der weiblichen Genitalien. Strassburg, 1903. 8°.
- Gümbel Th.* — Ueber das Chlorom und seine Beziehungen zu Leukämie. Berlin, 1903. 8°.
- Hannes V.* — Ein Fall von Endarteritis syphilitica an der untern Extremität. Strassburg, 1902. 8°.
- Hartmann E.* — Ueber tuberkulöse Granulationsgeschwülste der Nasenhöhle. Strassburg, 1903. 8°.
- Heildebrand W.* — Ueber die Condensation des Acetylacetons mit bernsteinsauerm Natrium unter Mitwirkung von Essigsäureanhydrid. Strassburg, 1902. 8°.
- Hellen (E. von der).* — Beitrag zur Anatomie des Zwerchfelles: Das Centrum tendineum. Stuttgart, 1903. 8°.
- Heubner W.* — Die Spaltung des Fibrinogens bei der Fibringerinnung. Leipzig, 1903. 8°.
- Heun H.* — Beitrag zur Lehre der Gasphegmone des Menschen. Strassburg, 1903. 8°.
- Himpel H.* — Ueber die Gruppe der 120 Collineationen, durch die ein räumliches Fünfeck in sich selbst übergeht. Strassburg, 1903. 8°.
- Hirschharn W.* — Die erweiterte Freund'sche Operation beim Krebs der schwangeren Gebärmutter. Mannheim, 1902. 8°.
- Hoepffner C.* — Ueber das Vorkommen pathogener Bakterien im gesunden Organismus. Strassburg, 1903. 8°.
- Jägerschmid A.* — Beiträge zur Kenntnis der Monochlorbromessigsäure. Strassburg, 1903. 8°.
- Kalbfleisch G.* — Symmetrische Cykliden. Strassburg, 1902. 8°.
- Karpinski L. C.* — Ueber die Verteilungen der quadratischen Reste. Strassburg, 1903. 8°.
- Kelber X.* — Ueber Dermatitis papillaris capillitii (Kaposi) (Dermatitis papillaris scleroticans nuchae). Strassburg, 1903. 8°.
- Kohn K.* — Ueber die Operation verjauchter Myome des Uterus. Strassburg, 1903. 8°.
- Kohts A.* — Ileus während der Schwangerschaft. Strassburg, 1903.
- Kraencker J.* — Ueber die Isobutyritsäure und deren Verhalten gegen Brom. Strassburg, 1902. 8°.
- Kraus P.* — Ueber die Dimethyldioxyglutarsäure und einige Derivate derselben. Strassburg, 1902. 8°.
- Kunlin H.* — Die Malaria in Elsass-Lothringen. Strassburg, 1903. 8°.
- Lebon C.* — Ueber das Mortalitätscontingent des Keuchhustens. Strassburg, 1902. 4°.
- Lehmann W.* — Ueber die Blutmenge der Placenta. Strassburg, 1902. 8°.
- Lewandowski F.* — Zur Theorie des Phlorhizindiabetes. Strassburg, 1904. 8°.

- Luxenburger M.* — Zur Kasuistik der vorgeschrittenen ektopischen Graviditäten bei lebendem Kind nebst besonderer Berücksichtigung der Therapie. Strassburg, 1902. 8°.
- Mangin F.* — Das Hermophenyl in der Behandlung der Syphilis. Strassburg, 1903. 8°.
- Matter O.* — Zur Kenntnis der Azlactone und ihrer Umwandlungsprodukte. Strassburg, 1903. 8°.
- Matthes S.* — Ueber Menière'sche Krankheit bei chronischer progressiver Schwerhörigkeit (sogenannter Sklerose). Strassburg, 1902. 8°.
- Meyer A.* — Ueber Pulsionsdivertikel des Oesophagus. Strassburg, 1903. 8°.
- Meyerhoff M.* — Ein Fall von Ruptur des schwangeren Nebenhornes. Strassburg, 1902. 4°.
- Moritz R. E.* — Ueber Continuanten und gewisse ihrer Anwendungen im zahlentheoretischen Gebiete. Gottingen, s. a. 8°.
- Müller G.* — Ueber die Aetiologie der bei Infektionskrankheiten auftretenden pneumonischen Prozesse. Strassburg, 1903. 8°.
- Munsch V.* — Ueber einen Fall von spontaner circumscripiter Hautangraen. Strassburg, 1902. 8°.
- Neubauer M.* — Ueber die Blutungen bei Placenta praevia. Berlin, 1902. 8°.
- Neukirch H.* — Ueber Actinomyceten. Strassburg, 1902. 8°.
- Niemann A.* — Ueber Druckstauung (Perthes) oder Stauungsblutungen nach Rumpfkompensation (Braun). Strassburg, 1903. 8°.
- Niket P.* — Abhängigkeit des Geburtsgewichtes der Neugeborenen vom Stand und der Beschäftigung der Mutter. Strassburg, 1902. 8°.
- Ohlmann E.* — Ueber Metastasen der Vagina bei Carcinom des Uterus und der Ovarien und die Bedeutung des retrograden Transportes. Strassburg, 1902. 8°.
- Peters W.* — Ueber stereoisomere Körper aus dem Aethylacetylaceton durch Blausäureanlagerung. Strassburg, 1903. 8°..
- Rebentisch F.* — Neubildungen am missbildeten Uterus. Strassburg, 1903. 8°.
- Reichert F.* — Ueber die Einwirkung von Stickstofftetroxyd auf Phenylisocrotonsäure. Strassburg, 1903. 8°.
- Rust J.* — Das Geschlecht der Fehl- und Totgeburten. (Nach den Ergebnissen der Strassburger Klinik in den Jahren 1873 bis 1900). Strassburg, 1903. 8°.
- Sachs E.* — Die puerperalen Erkrankungen und Todesfälle der septischen Abteilung der Strassburger Frauenklinik 1891-1901. Berlin, 1902. 8°.
- Samuely F.* — Ueber die aus Eiweiss hervorgehenden Melanine. Braunschweig, 1903. 8°.
- Schaller P.* — Erfahrungen über subkutane Darmrupturen. Strassburg, 1903. 8°.
- Scheen O.* — Ueber die Methylitaconsäure und ihr Verhalten gegen Natronlauge und Brom. Strassburg 1902. 8°.

- Schmidt F.* — Zur Kasuistik des Chorioepithelioma malignum. Strassburg, 1902. 8°.
- Schroeder M.* — Beiträge zur Kenntnis der Stoffwechselprodukte des *Bacillus lactis aërogenes*. Strassburg, 1903. 8°.
- Schultze E.* — Zur Pathologie und Therapie des Ulcus corneae serpens. Mit Benutzung des Materials der Strassburger Augenklinik. Berlin. s. a. 8.
- Schwärtzlin A.* — Ueber die Oxydation der Dimethylitaconsäure und der Dimethylitaconsäure mit Kaliumpermanganat. Strassburg, 1903. 8°.
- Wahl C.* — Casuistische Beiträge zur Kenntnis des Facialisparalysen. Strassburg, 1902. 8°.
- Weber L.* — Ueber die Verwundbarkeit des Braun'schen Apparates zur Chloroform-Aethernarkose. Strassburg, 1903. 8°.
- Weber R.* — Ueber die Gruppe des *Bacillus proteus vulgaris*. Strassburg, 1903. 8°.
- Weinberger R.* — Die pathologische Anatomie der Puerperal-Eclampsie und Urämie. Strassburg, 1903. 8°.
- Werscher G.* — Kondensation von Valerolakton und Bernsteinsäureäthylester mit Natriumäthylat. Strassburg, 1902. 8°.
- Zimmermann A.* — Beitrag zur Kenntnis der Hypertrophien angeborenen Ursprungs. Strassburg, 1902. 8°.
- Zimmermann H.* — Ueber die seltenere Formen der Brustdrüsengeschwülste. Strassburg, 1902. 8°.
- Zoepfel R.* — Über die Wirkungsgrade narkotisch wirkender, gechlorter Verbindungen der Fettreihe. Leipzig, 1903. 8°.

V. C.